



# Electrostatique et Magnetostatique: Notes du cours

Evgeni Popov

## ► To cite this version:

Evgeni Popov. Electrostatique et Magnetostatique: Notes du cours. Licence. Electromagnétisme II, Marseille, St. Charles, Univ. de Provence, 2001, pp.139. cel-00773417v2

**HAL Id: cel-00773417**

**<https://cel.hal.science/cel-00773417v2>**

Submitted on 25 Jan 2013

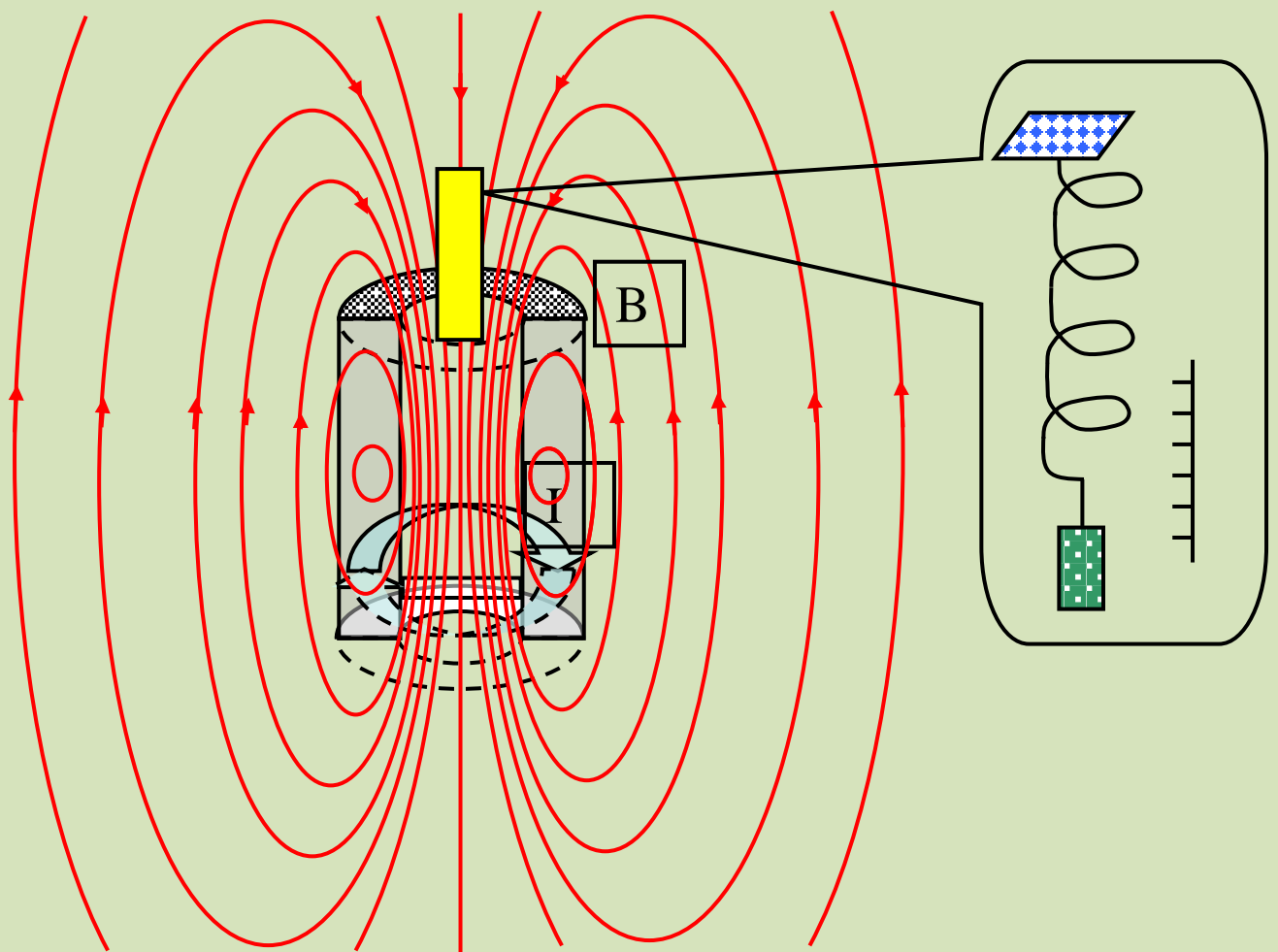
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Electrostatique et Magnétostatique

## Notes du cours

**Evgeni Popov**



**Electrostatique et Magnétostatique**  
**Notes du cours**

(Cours d'Electromagnétisme pour L2 Sciences Physiques et Chimiques)

Auteur : Evgeni Popov, Institut Fresnel, Université d'Aix-Marseille (AMU)

Web : [www.fresnel.fr/perso/popov/coursEM2013](http://www.fresnel.fr/perso/popov/coursEM2013)

**Copyright 2013 : Evgeni Popov, AMU**

AMU, 2013

**Notes du Cours  
d'Electromagnétisme :**

**Electrostatique et magnétostatique**

**(L2 Physique - Chimie)**

**E. Popov**

## Plan de cours

### Electrostatique

Charge électrique, types de charges. Loi de Coulomb.

Champ électrique, lignes de champ

Dipôle électrostatique

Flux du champ électrostatique, théorème de Gauss

Energie et potentiel du champ électrostatique

Théorème d'Ostrogradski, théorème de Gauss – présentation différentielle

Equations de Laplace et de Poisson

Discontinuité de champ électrique

Type de matériels : conducteurs, isolateur et semi-conducteurs

Conducteurs dans champ électrostatique. Cage électrostatique. Corona décharge

Courant électrique et la loi d'Ohm

Condensateurs

Diélectriques dans champ électrostatique, constante diélectrique, permittivité relative, polarisabilité de milieu

### Magnétostatique

Force magnétique, champ magnétique. Loi de Biot et Savart.

Force sur charge en mouvement dans un champ magnétique, la force de Lorentz

Mouvement cyclotron et aurore boréale

Loi de Laplace, effet Hall

Champ créé par une charge en mouvement et un courant électrique

Flux de champ magnétique

Dipôle magnétique

Interactions magnétiques

Théorème d'Ampère, théorème de Stokes

LES équations principales d'électrostatique et magnétostatique

Discontinuité de champ magnétique

Force magnétohydrodynamique

Potentiel vecteur

### Electromagnétisme (dynamique)

L'induction électromagnétique et la première des équations de Maxwell

Inductance mutuelle

Courant de déplacement et la deuxième des équations de Maxwell

LES équations de Maxwell et les ondes électromagnétiques

Propriétés magnétiques des matériaux (diamagnétisme, paramagnétisme et ferromagnétisme)

Champ H, susceptibilité et perméabilité magnétique

## Pourquoi faire et à quoi ça sert ?

### Electrostatique

1. Courants électriques, loi d'Ohm, circuits électriques
2. Diélectriques, semiconducteurs  $\Longrightarrow$  transistors, diodes

puces intégrales      TV, PC, portables, Hi-Fi

3. Structure de la matière (atomes et molécules, propriétés chimiques)

### Magnéto-statique

1. Boussoles, compasses
2. Aurore boréale, mouvement cyclotron, séparation d'isotopes
3. Dipôle magnétique, aimantes, magnétisation de milieu

### Electromagnétisme

1. Les ondes électromagnétiques : la lumière, radio et TV  
émissions, télécommunications
2. Micro-ondes, radiothérapie
3. Radars aériens, maritimes, radioastronomiques et policiers
4. Relativité restreinte
5. Optique et spectroscopie

## **Horaires :**

12 cours de 2 heures

26 séances de TD (2 fois par semaine)

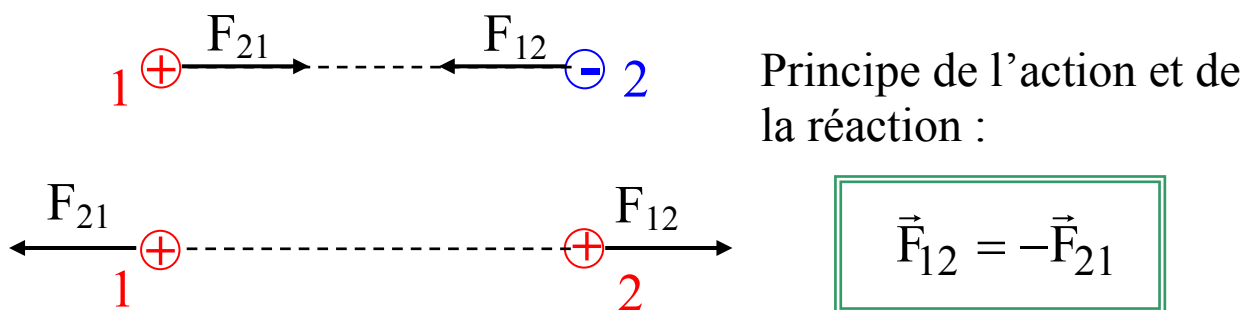
Examen partiel en électrostatique conte pour 50% d'électrostatique  
(en totale – pour 25%)

## Charge électrique

1. Charge  $\xrightarrow{\text{crée}}$  force électrique  
 $\xleftarrow{\text{s'exerce sur les charges}}$

2. Deux signes :  $\oplus$  et  $\ominus$ :

deux types de forces (d'attraction et de répulsion)



3. Quantification des charges :

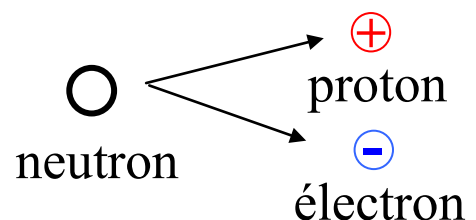
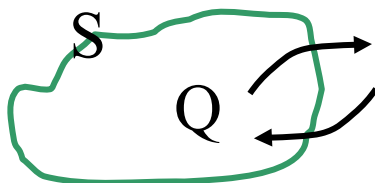
électron  $\ominus$   $e^-$   
 proton  $\oplus$   $p^+$

$$e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ [C]}$$

$$1 \text{ coulomb} = 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ s}$$

4. Conservation

$$\Delta Q = \sum \text{charges entrantes} - \sum \text{charges sortantes}$$



5. Les charges sont additives :

$$q_1' + q_1'' \rightarrow \vec{F}_{21} = \vec{F}_{21}' + \vec{F}_{21}''$$

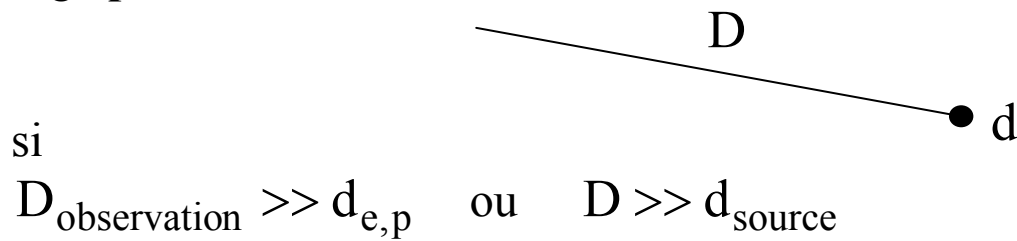


## Types de charges

Dans la nature : l'électron et le proton (les quarks n'existent pas séparément)

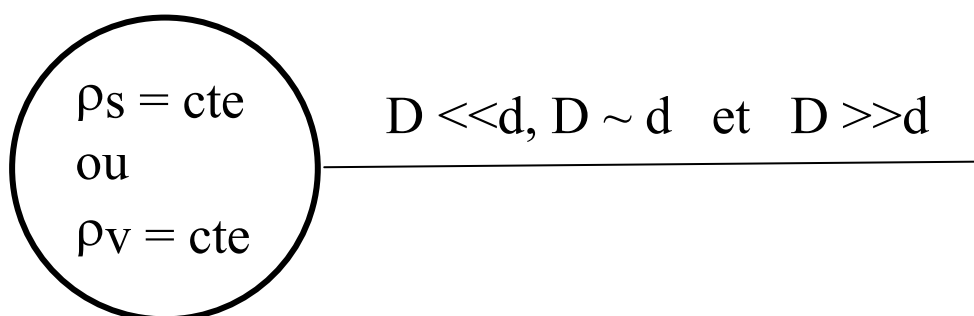
### Approximations utiles :

#### I. Charge ponctuelle :



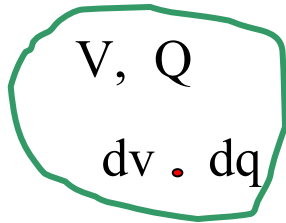
caractéristiques : charge, position, vitesse

Remarque : Une sphère chargée uniformément crée un champ comme une charge ponctuelle



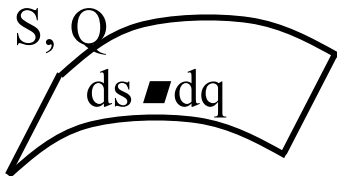
## II. Charges **continues**

### 1. Charge **volumique** : densité de charge volumique



$$\rho_v(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{dv} [\text{Cm}^{-3}].$$

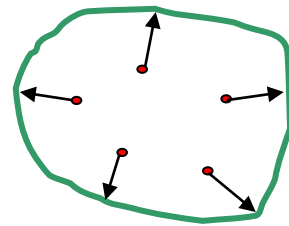
### 2. Charge **surfactive** : densité surfacique



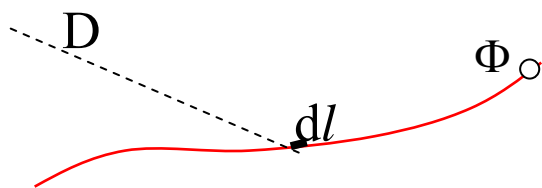
$$\rho_s(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{ds} [\text{Cm}^{-2}]$$

e.g. conducteurs :

Les charges libres sont repoussées  
jusqu'à la surface



### 3. Charge **linéique** ( $D \gg \Phi$ ): densité linéique



$$\rho_\ell(\vec{r}) = \frac{dq(\vec{r})}{d\ell} [\text{Cm}^{-1}]$$

**def** : un volume, une surface ou un fil sont chargés uniformément si  $\rho = \text{cte}$  et  $Q_{\text{total}} = \rho \cdot V, S$  ou  $L$

**Remarque :**

Notations :  $\rho_\ell = \lambda, \rho_S = \sigma,$

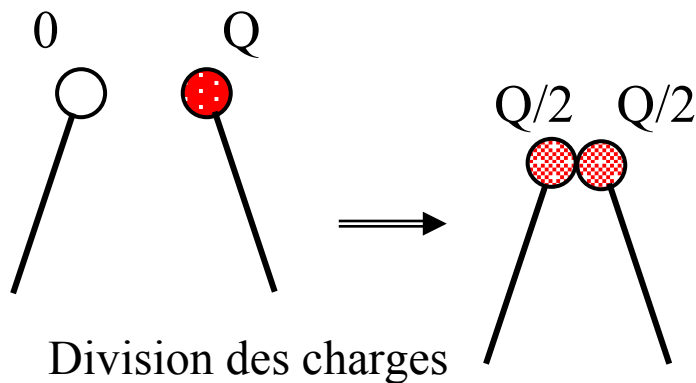
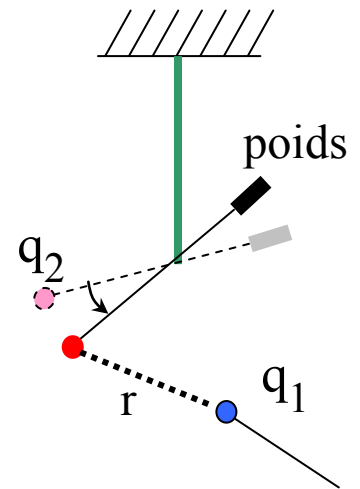
mais par fois  $l$  – longueur d’onde et  $s$  - conductivité

## Loi de Coulomb

Charles Augustin de Coulomb - 1785

### Règles de Coulomb :

1. Les charges similaires se repoussent, les charges opposées s'attirent.
2. L'attraction ou la répulsion s'exerce sur la ligne droite entre les charges.
3. La magnitude (la norme) de la force est proportionnelle au carré de l'inverse de la distance entre les charges.
4. La force est proportionnelle à la magnitude de chacune des charges et les charges sont additives.



si  $r \rightarrow r'$

$$F \rightarrow F' = F \frac{r^2}{r'^2}$$

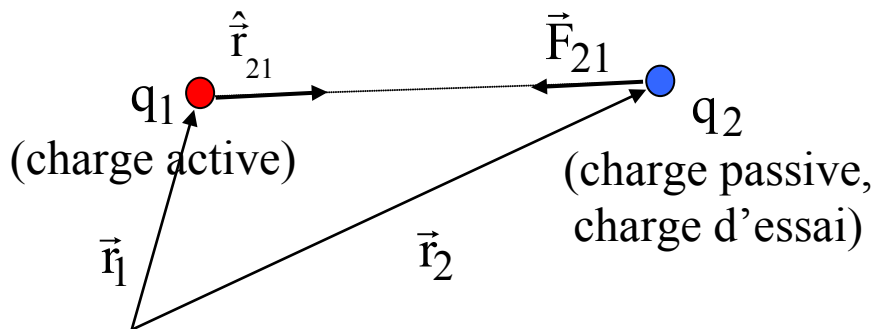
### Hypothèses :

1. La force électrique créée par une petite sphère est la même que si la charge est ponctuelle.
2. L'isotropie d'une charge ponctuelle : la force ne dépend pas de l'orientation de la sphère dans l'espace.
3. L'indépendance mutuelle des forces électrique, élastique et gravitationnelle.

**Expression mathématique :**

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\vec{r}}_{21}$$

$$\hat{\vec{r}}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{r} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{r}$$



$q_1 q_2 > 0 \Rightarrow F \uparrow \uparrow r_{21} : \text{répulsion}$

$q_1 q_2 < 0 \Rightarrow F \uparrow \downarrow r_{21} : \text{attraction}$

La constante de Coulomb  $k$

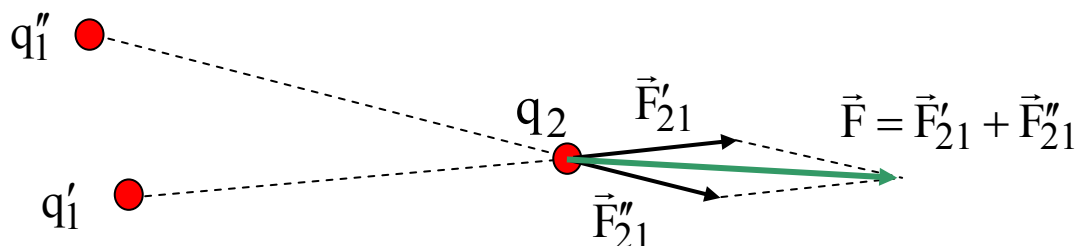
$$k = 10^{-7} \text{ c}^2 \approx 8.95 \times 10^9 \text{ [Nm}^2\text{C}^{-2}\text{]}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9} \text{ permittivité du vide}$$

Autre propriété de la force électrique (linéarité, principe de superposition) :

Les sources différentes  $\longrightarrow$  **sommation** vectorielle des forces



## Champ électrique

**Notion** de champ électrostatique : la propriété d'une charge de modifier les caractéristiques de l'espace : chaque autre charge est soumise à une force électrostatique.

Cause  $\longrightarrow$  résultat : charge  $\longrightarrow$  champ  $\longrightarrow$  force

1. Le champ ne dépend pas de la charge qui est soumise à la force (dite charge **passive**).
2. Le champ représente le 'porteur' d'action à distance de la charge qui le crée (dite charge **active**).

**Def.** Dans une région d'espace il existe un champ électrostatique si une charge placée dans la région est soumise à une force électrostatique

Propriétés :

1. Le champ est proportionnel à la force, donc vecteur
2. Le champ ne dépend pas de la magnitude de la charge passive, donc est égal à la force exercée sur une charge passive unitaire :

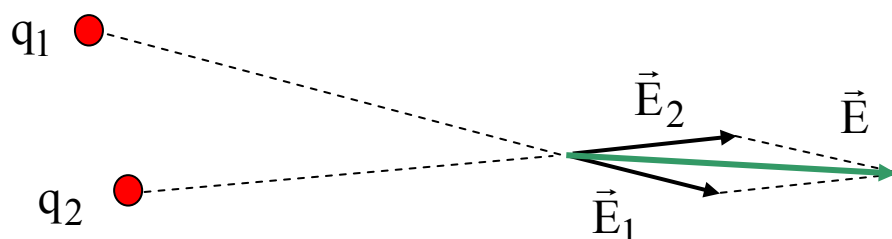
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \text{ [NC}^{-1}\text{]}, \text{ usuelle [Vm}^{-1}\text{]}$$

Remarque : électrostatique : les charges ne bougent pas et il n'y a pas d'influence des charges passive sur les charges actives ('collées' dans l'espace).

Le champ  $\longrightarrow$  la force :  $\vec{F} = q\vec{E}$

Le champ est additif (principe de superposition) :  $\longrightarrow$

$$\vec{E} = \frac{\sum \vec{F}_j}{q} = \sum \frac{\vec{F}_j}{q} \equiv \sum \vec{E}_j$$

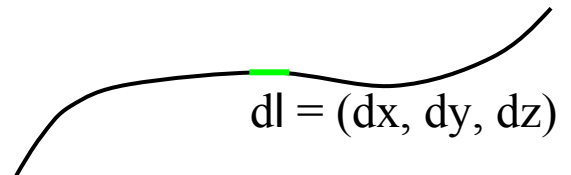


## Lignes de champ

Représentation graphique de champ (introduite par Faraday) :  
les lignes tangentes au vecteur de champ

Si  $d\vec{\ell} = (dx, dy, dz)$  est un élément de ligne,  $d\vec{\ell} // \vec{E} \Rightarrow d\vec{\ell} = c\vec{E}$   
donc

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} = c(\vec{r})$$



La densité des lignes est proportionnelle à la magnitude du champ

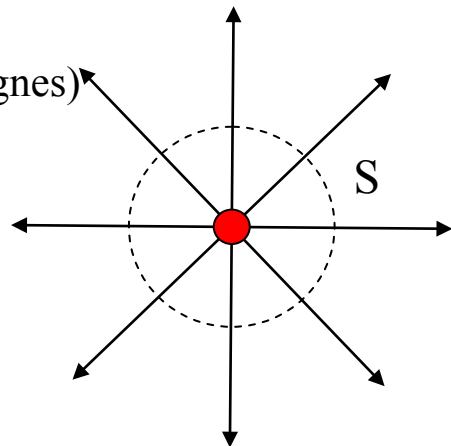
I. Champ d'une charge **ponctuelle**  $q_0$  située à l'origine du système de coordonnées :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \hat{r}$$

radiale :

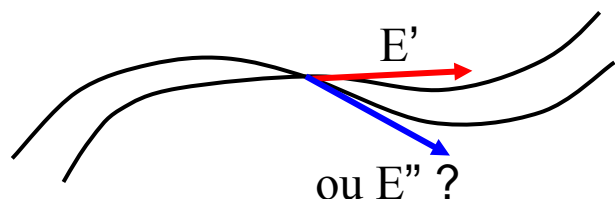
densité =  $N/S = N/4\pi r^2$  (N – nombre de lignes)

$E \rightarrow \infty$  **diverge** sur  $r \rightarrow 0$   
(densité  $\rightarrow \infty$ )



Propriétés des lignes de champ :

1. Les lignes ne se croisent  
que sur les charges (le  
champ est unique)



2. Les lignes commencent sur la charge positive (pourquoi ?) et finissent sur la charge négative.

### Cas particuliers

1. Le champ électrostatique créé dans un point  $P(r)$  par un élément de volume  $dv$  ayant une densité **volumique** de charge  $d\rho_v$  et situé dans  $P'(r')$  est donné par l'équation :

$$d\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_v(\vec{r}')dv(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$$

Le champ créé par un volume  $V$  est obtenu par intégration tridimensionnelle sur  $V$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_v(\vec{r}')dv(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho_v(\vec{r}')dv(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \Delta\hat{\vec{r}} \end{aligned}$$

2. Champ des charges **surfaiques** :

$$\begin{aligned} d\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_s(\vec{r}')ds(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad \text{et} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\rho_s(\vec{r}')dS(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}$$

3. Champ des charges **linéiques** :

$$\begin{aligned} d\vec{E}(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_\ell(\vec{r}')d\ell(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad \text{et} \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\rho_\ell(\vec{r}')d\ell(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}$$



Remarque préliminaire :

$dv \propto r^3 \Rightarrow \iiint$  ne diverge pas quand  $\Delta r \rightarrow 0$

$ds \propto r^2 \Rightarrow \iint$  ne diverge pas quand  $\Delta r \rightarrow 0$

$d\ell \propto r \Rightarrow \int$  **diverge** quand  $\Delta r \rightarrow 0$  (comme pour charge ponctuelle)

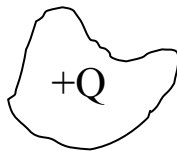
Pourquoi ? La définition de charge ponctuelle et linéique nécessite que la distance d'observation soit beaucoup plus grand que les dimension de charge, donc on n'a pas le droit de se situer sur  $r \rightarrow 0$ .

## Considérations de la symétrie

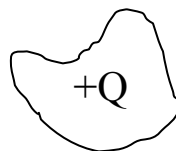
Règles générales :

1. Si la distribution de charges électriques est symétrique par rapport à un point, ligne ou plan, le champ électrique à la même symétrie.
2. Si la distribution de charges électriques est antisymétrique par rapport à un point, ligne ou plan, le champ électrique à la même antisymétrie.

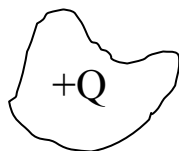
Exemples :



P : plan de symétrie de Q



E est aussi symétrique  
par rapport à P



P : plan d'antisymétrie de Q



E est aussi antisymétrique  
par rapport à P

### Conséquences :

1. Le champ électrique est contenu dans chaque plan de symétrie, hors des charges.
2. Le champ électrique est perpendiculaire à chaque plan d'antisymétrie des charges.
3. S'ils existent deux plans de symétrie non parallèles, sur l'intersection de ces plans le champ électrique est dans la direction de cette intersection.

### Aspects pratiques :

1. Il suffit de trouver un plan d'antisymétrie de charges pour déterminer la direction de champ électrique sur ce plan.
2. Il faut deux plans de symétrie pour déterminer la direction de champ électrique sur son intersection.

## Champ d'un fil chargé uniformément

charge sur axe x,

observation sur  $y_0$

$\rho = \text{cte}$ ,  $dl = dx$

$\sin\theta = x/r$

1)  $E_x = 0$  :

pour  $\forall$  charge  $\rho dx$  sur  $x$ , la charge sur  $-x$  compense  $E_x$  :

$$dE_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dx}{r^2} \sin\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dx}{r^3} x \Rightarrow dE_x(x) + dE_x(-x) = 0$$

$$2) dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dx}{r^2} \cos\theta$$

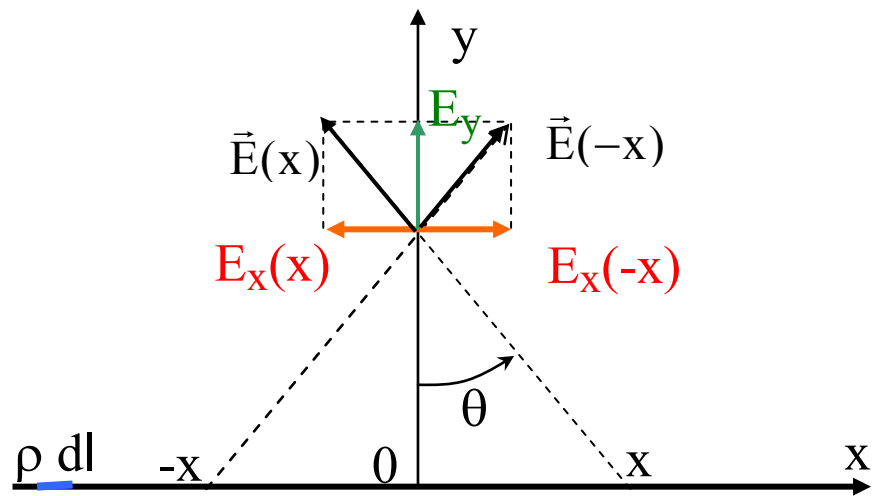
;

$$x = y_0 \tan\theta$$

$$\Downarrow \\ dx = \frac{y_0 d\theta}{\cos^2 \theta} ; \quad r^2 = \frac{y_0^2}{\cos^2 \theta} ;$$

$$E_y = \int_x dE_y = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{r^2} \cos\theta = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} y_0 \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta}{y_0^2} \cos\theta$$

$$= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 y_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \cos\theta = \frac{2\rho}{4\pi\epsilon_0 y_0}$$

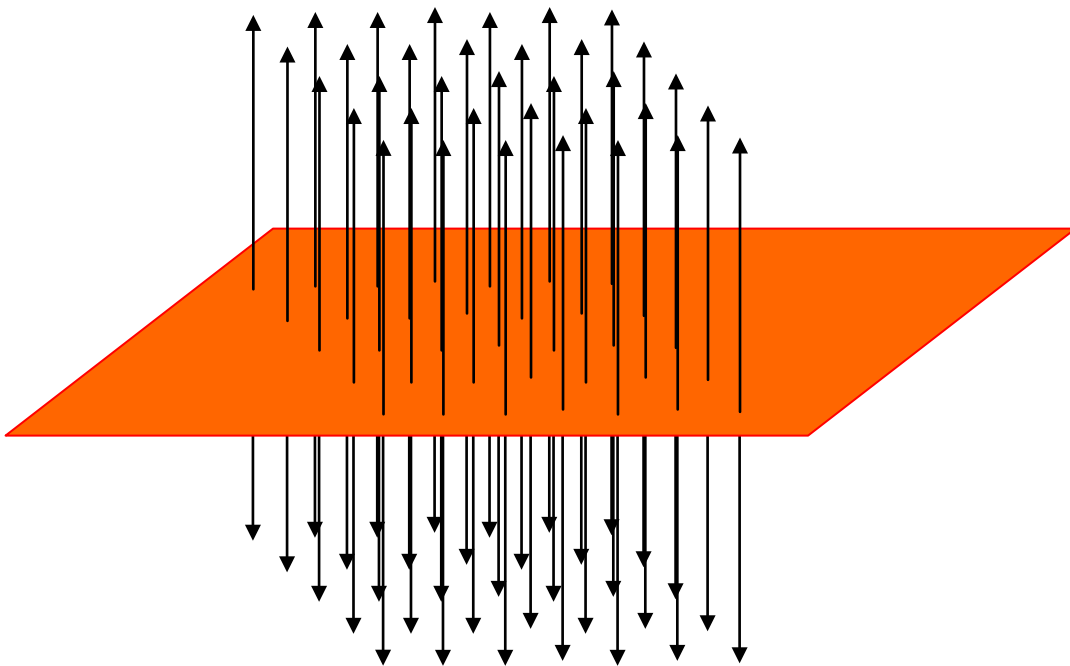
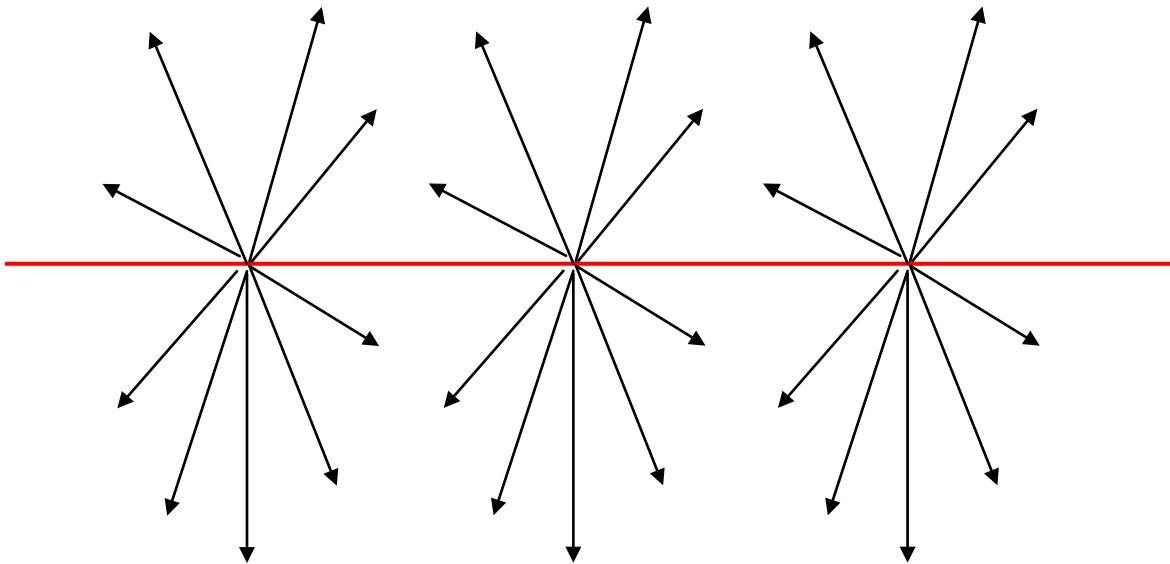


Observations :

I.  $E_{\parallel} = 0$

II.  $E_{\perp} = \frac{2\rho}{4\pi\epsilon_0 y_0}$  - radial

III.  $E$  diverge sur les charges linéiques :  $E \rightarrow \infty$  si  $y_0 \rightarrow 0$



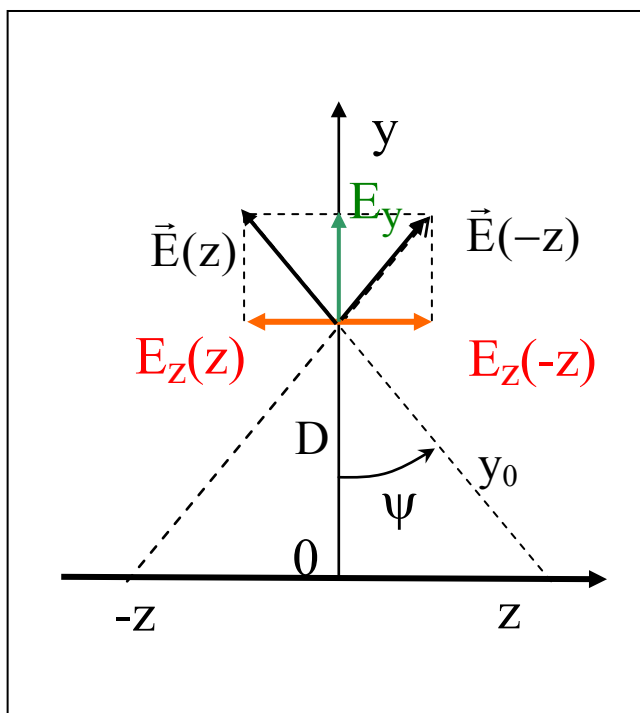
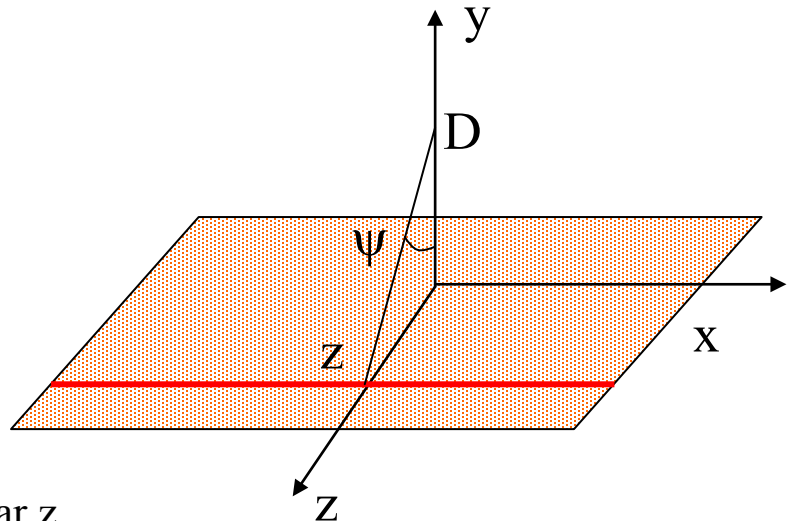
## Champ d'un plan chargé uniformément

observation sur axe y  
à distance D

$\rho = \text{cte}$ ,

$$\vec{E} = \iint_S d\vec{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E} dx$$

champ d'un fil // x et passant par z



1)  $E_x = 0$

2)  $E_z = 0$  pour  $\forall$  fil par z, le fil par  $-z$  compense  $E_z$

3)  $dE_y = dE_{\text{fil}} \cos \psi = \frac{\rho \cos \psi}{2\pi \epsilon_0 y_0} dz$

$$E_y = \int_x dE_y = \frac{\rho}{2\pi \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \psi}{y_0} dz =$$

$$\left. \begin{aligned} z &= D \tan \psi \Rightarrow dz = \frac{D d\psi}{\cos^2 \psi} \\ y_0 &= \frac{D}{\cos \psi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} &= \frac{\rho}{2\pi \epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \psi \frac{\cos \psi}{D} \frac{D d\psi}{\cos^2 \psi} \\ &= \frac{\rho}{2\pi \epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\psi = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

**Observations :**

I.  $E_{\parallel} = 0$

II.  $E_{\perp} = \frac{\rho}{2\epsilon_0}$  invariant de D

III. E a des directions opposées des deux côtés de la surface

IV. E **ne** diverge pasV. E subit une discontinuité à la traversée de la surface chargée, égale à  $\frac{\rho_s}{\epsilon_0}$ .

Explication physique :

Si on regarde le champ créé par la surface vue dans le même angle solide à une distance différente :

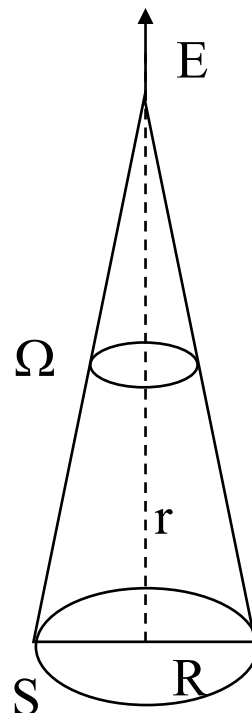
$$E \propto \frac{Q_S}{r^2}$$

mais  $Q_S = \rho S \propto \rho R^2$

donc  $E_{\Omega}$  est indépendant de r

$$R \sim r$$

$$S \sim R^2 \sim r^2$$



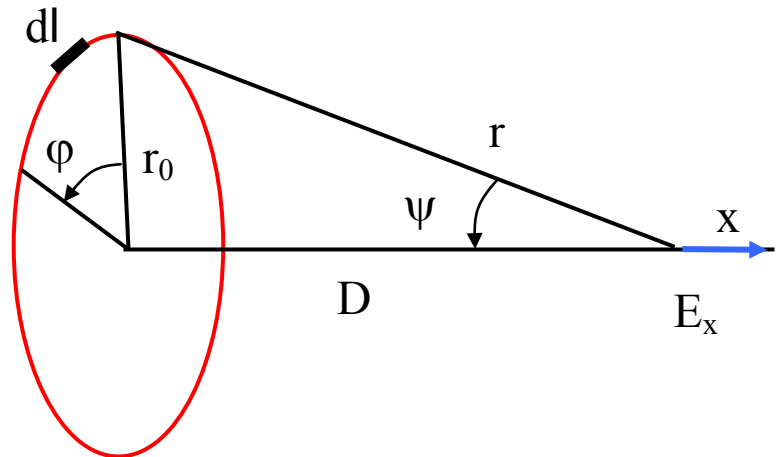
## Champ sur l'axe d'un fil circulaire chargé uniformément

observation sur l'axe x  
à distance D

$\rho_l = \text{cte}$ ,

1) sur l'axe : symétrie  
 $\Rightarrow$  seul  $E_x \neq 0$

$$dE_x = \frac{\rho dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \psi$$



$$\begin{aligned}
 E_O &= \int_{\ell} dE_x = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} \cos \psi \frac{1}{r^2} dl \\
 &= \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \cos \psi \frac{\cos^2 \psi}{D^2} D \tan \psi d\phi \\
 &= \frac{\rho \sin \psi \cos^2 \psi}{4\pi\epsilon_0 D} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\rho \sin \psi \cos^2 \psi}{2\epsilon_0 D} \\
 &= \frac{\rho r_0 D}{2\epsilon_0 (\sqrt{r_0^2 + D^2})^3} = \frac{QD}{4\pi\epsilon_0 r^3}
 \end{aligned}$$

$r = \frac{D}{\cos \psi}$   
 $dl = r_0 d\phi = D \tan \psi d\phi$

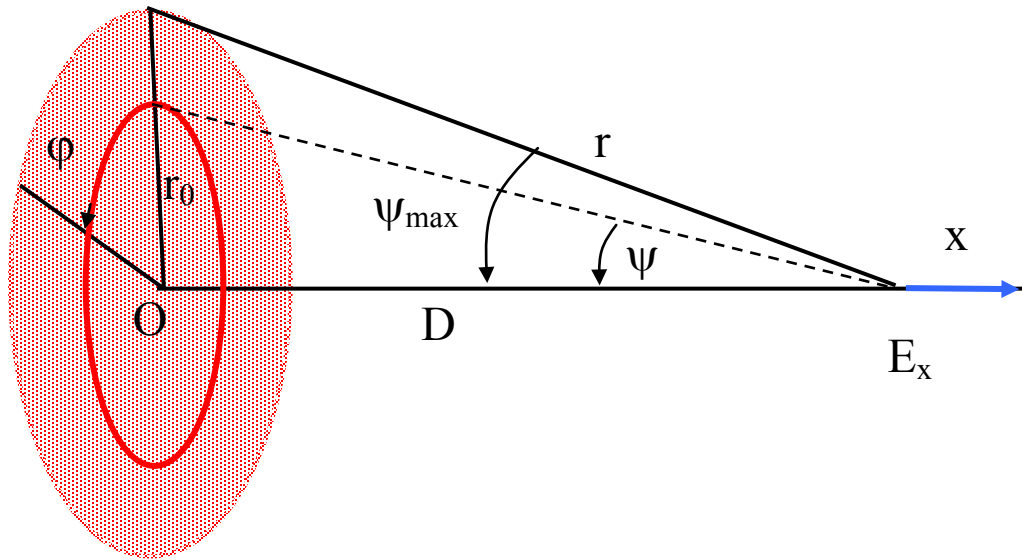
$Q = 2\pi r_0 \rho$   
 $\sin \psi = \frac{r_0}{r}$   
 $\cos \psi = \frac{D}{r}$

I.  $D \gg r_0$  :  $D \approx r \Rightarrow E_O \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  - charge ponctuelle

II.  $D = 0$ ,  $E = 0$



## Disque



$$r_0 = D \tan \psi \Rightarrow dr_0 = \frac{D}{\cos^2 \psi} d\psi$$

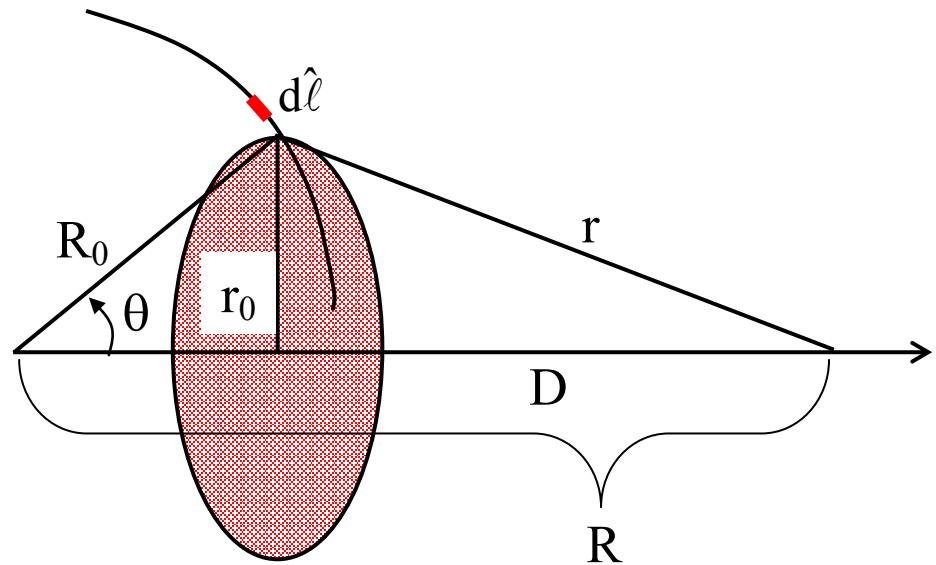
$$\begin{aligned} E_{\bullet} &= \int_0^{r_0} E_O(\tilde{r}_0) d\tilde{r}_0 = \int_{\psi} \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{\sin \psi \cos^2 \psi}{D} \frac{D d\psi}{\cos^2 \psi} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^{\psi_{\max}} \sin \psi d\psi \\ &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} (1 - \cos \psi_{\max}) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{D}{\sqrt{r_0^2 + D^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{I. } \left\{ \begin{array}{l} D \rightarrow 0 \\ \text{ou} \\ r_0 \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow E_{\bullet} \rightarrow \frac{\rho}{2\epsilon_0} \quad (\text{plan infini})$$

II.  $r_0 \rightarrow 0$ , mais  $Q = \pi r_0^2 = \text{cte}$  :

$$E_{\bullet} = \frac{Q}{2\epsilon_0 r_0^2} \left( 1 - \frac{D}{\sqrt{r_0^2 + D^2}} \right) \rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 D^2} \quad (\text{charge ponctuelle})$$

### Sphère : charge surfacique uniforme



$$E_{\text{sph}} = \int_S E_O d\hat{\ell} = \int_0^\pi E_O R_0 d\theta = \int_0^\pi \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{r_0 D}{r^3} R_0 d\theta$$

$(d\hat{\ell} = R_0 d\theta)$

Changement d'intégration en fonction de  $r$  :

$$1. \quad D = r \cos \psi = r \frac{R^2 + r^2 - R_0^2}{2Rr} = \frac{R^2 + r^2 - R_0^2}{2R}$$

$$2. \quad \cos \theta = \frac{R_0^2 + R^2 - r^2}{2RR_0} \Rightarrow \sin \theta d\theta = -d \cos \theta = \frac{r}{RR_0} dr$$

$$3. \quad r_0 = R_0 \sin \theta$$

$$E_{\text{sph}} = \int_0^\pi \frac{\rho}{2\epsilon_0} r_0 \frac{D}{r^3} R_0 d\theta = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_r \overbrace{R_0 \sin \theta}^{r_0} \overbrace{\frac{R^2 + r^2 - R_0^2}{2R}}^D \overbrace{\frac{1}{r^3}}^{\frac{r}{\sin \theta R R_0}} R_0 \overbrace{d\theta}^{\frac{r}{\sin \theta R R_0}} dr$$

A l'extérieur ( $R > R_0$ ) :

$$\begin{aligned}
 E_{\text{sph}} &= \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} \int_{R-R_0}^{R+R_0} \frac{r^2 + R^2 - R_0^2}{r^2} dr = \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} \int_{R-R_0}^{R+R_0} \left( 1 + \frac{R^2 - R_0^2}{r^2} \right) dr \\
 &= \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} \left( R + R_0 - R + R_0 - \frac{R^2 - R_0^2}{R + R_0} + \frac{R^2 - R_0^2}{R - R_0} \right) \\
 &= \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} (2R_0 - R + R_0 + R + R_0) \\
 &= \frac{\rho R_0^2}{\epsilon_0 R^2} = \frac{4\pi\rho R_0^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} : \text{comme si la charge est dans le} \\
 &\text{centre}
 \end{aligned}$$

A l'intérieur ( $R < R_0$ ) :

$$\begin{aligned}
 E_{\text{sph}} &= \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} \int_{R_0-R}^{R+R_0} \frac{r^2 + R^2 - R_0^2}{r^2} dr = \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} \int_{R_0-R}^{R+R_0} \left( 1 + \frac{R^2 - R_0^2}{r^2} \right) dr \\
 &= \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R_0}{R^2} \left( R + R_0 - R_0 + R - \frac{R^2 - R_0^2}{R + R_0} + \frac{R_0^2 - R^2}{R - R_0} \right) = 0
 \end{aligned}$$

Remarques :

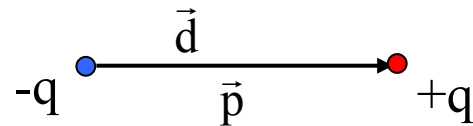
1. A l'intérieur de la sphère le champ est zéro !
2. Le champ d'une sphère ayant une distribution de charge volumique radiale ( $\rho_V = \rho_V(r)$ ) peut être calculé par intégration sur  $r$  du champ des charges surfaciques de chaque sphère : le même résultat est obtenu à l'extérieur.

## Dipôle électrostatique

**Définition** : L'ensemble de deux charges ponctuelles opposées (+q et -q) à une distance d

- **charge** de dipôle : q  
(attn ! charge totale : zéro !)

- **moment** dipolaire :



$$\vec{p} = q\vec{d} \equiv q\vec{r}_{+-}$$

- **unité** : [Cm], [D] (Debye) :  $1D = \frac{1}{3}10^{-29} \text{ Cm}$

- **types** :

|           |        |       |
|-----------|--------|-------|
| permanent | induit | mixte |
|-----------|--------|-------|

|                       |   |   |
|-----------------------|---|---|
| $d = \text{cte}$      | $\vec{p} = \alpha \vec{E}_{\text{externe}}$ | $\vec{p} = \vec{p}_0 + \alpha \vec{E}_{\text{externe}}$ |
| $\vec{p} = \vec{p}_0$ |   |   |

Les atomes et les molécules ont des charges positives et négatives. Si les centres des charges coïncident (e.g., les molécules symétriques),  $\vec{p}_0 = 0$ . Un champ externe 'tire' les charges différentes dans les directions opposées, les forces intramoléculaire s'opposent. Pour le nouvel équilibre, les centres des charges positives et négatives sont déplacés et un dipôle induit est créé, proportionnel au champ externe. La constante de proportionnalité  $\alpha$  s'appelle **polarisabilité** du milieu.

Si  $\vec{p}_0 \neq 0$  (l'eau) : deux cas en absence de champ externe

- **désordre** chaotique (liquides, milieux amorphes, polycristaux)  
 $\vec{p}_{0,\text{total}} = 0$
- **ordre** partiel : segnetoélectriques (ferroélectriques) – cristaux ayant un dipôle naturel

Dans champ externe : deux cas

- les dipôles permanents ne bougent pas :  $\vec{p}_{0,\text{total}} = \text{cte}$
- les dipôles sont alignés partiellement parallèlement au  $\vec{E}_{\text{externe}}$   
 $\Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_0 + \alpha \vec{E}_{\text{externe}}$

## Champ d'un dipôle électrostatique

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right) =$$

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{r} \left( \frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3} \right) - \frac{\vec{d}}{2} \left( \frac{1}{r_+^3} + \frac{1}{r_-^3} \right) \right]$$

en utilisant  $\vec{r}_{\pm} = \vec{r} \mp \frac{1}{2}\vec{d}$ .

$$r_{\pm}^2 = r^2 \mp 2rd \cos \theta + d^2$$

$$r_{\pm}^{-3} = (r_{\pm}^2)^{-3/2} \approx (r^2)^{-3/2} \mp (-3/2)(r^2)^{-3/2-1} 2rd \cos \theta, \quad d \ll r$$

$$= r^{-3} \pm 3r^{-4}d \cos \theta$$

$$\frac{1}{r_+^3} + \frac{1}{r_-^3} \approx \frac{2}{r^3},$$

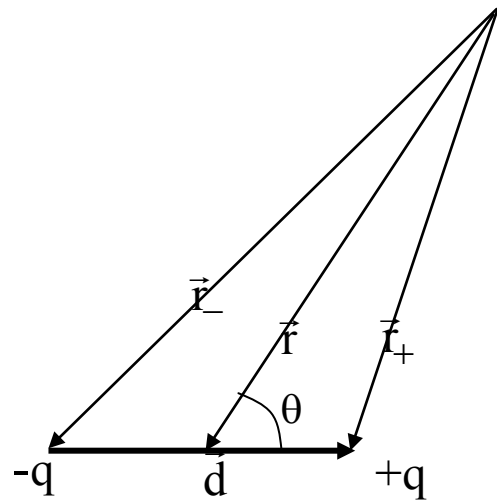
$$\frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3} \approx \frac{6d \cos \theta}{r^4}$$

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \vec{r} \frac{3d \cos \theta}{r^4} - \frac{\vec{d}}{2} \frac{2}{r^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3p \cos \theta \hat{r} - \vec{p})$$

NB Soit deux charges identiques (+, +) :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r}_+}{r_+^3} + \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \vec{r} \left( \frac{1}{r_+^3} + \frac{1}{r_-^3} \right) - \frac{\vec{d}}{2} \left( \frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3} \right) \right]$$

$$= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_0}{r^2} : \text{ le champ de charge ponctuelle de } 2q$$



## Dipôle électrostatique

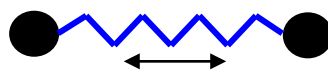
Observations :

1. Champ décroît comme  $\frac{1}{r^3}$  : plus vite que le champ d'une charge (le charge totale du dipôle est zéro)
2. Symétrie axiale
3. Sur l'axe à l'extérieur :  $\cos\theta=1 \Rightarrow \vec{E} = -\frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$  :  $\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{p}$
4. Dans le plan transverse :  $\cos\theta = 0$  :  $\vec{E} \uparrow \downarrow \vec{p}$
5. Très proche d'une charge : comme pour la charge isolée

Positions principales de Gauss :  $\vec{E} // \vec{p}$  { l'axe  
plan transverse

**Très important :**

- pour la polarisation de milieux
- les dipôles induits sont comme les oscillateurs mécaniques



oscillations  $\longrightarrow$  ondes électromagnétiques

- en magnétisme : les charges de base sont des dipôles magnétiques

## Champ de deux charges identiques

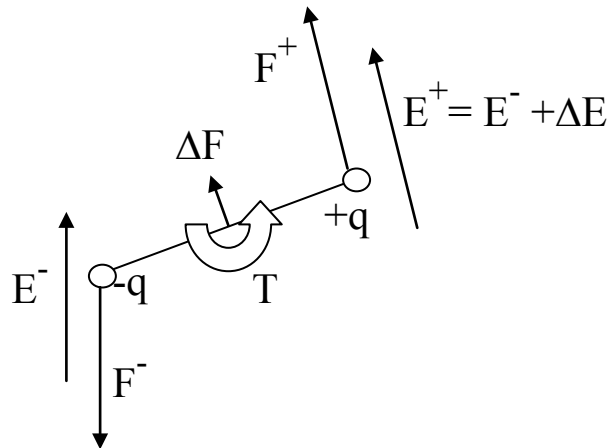
Observations :

1. Distance large ou très faible : comme une charge isolée
2. Dans le plan transverse :  $\vec{E} \perp$  ligne de charges
3. Exactement entre les deux charges  $E = 0$  (mais c'est un équilibre instable)

## Dipôle dans un champ électrostatique externe

$$\vec{F}^- = -q\vec{E}^-$$

$$\vec{F}^+ = +q(\vec{E}^- + \Delta\vec{E})$$



### 1. Force résultante générale :

$$\Delta\vec{F} = \vec{F}^+ + \vec{F}^- = q\Delta\vec{E}, \quad \text{pour un champ } E \text{ uniforme } \Delta\vec{F} = 0$$

$$\Delta\vec{F} \xrightarrow{d \rightarrow 0} d\vec{F} = q d\vec{E} = q \left( dx \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + dy \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + dz \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = \left( \frac{\partial E_x}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x}, \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)$$

$$\text{mais } q(dx, dy, dz) = \vec{p}$$

$$d\vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}, \quad \nabla \vec{E} \text{ est tensor de rang 2 (représenté comme une matrice carré)}$$

### 2. Force du couple (**moment de torsion**) :

$$\vec{T} = \vec{d} \wedge \vec{F} = \vec{d}q \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E} \quad (\text{produit vectoriel de deux vecteurs})$$

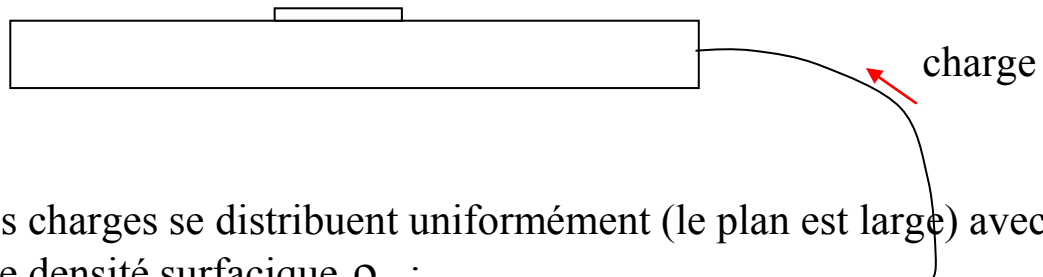
$$T = 0 \text{ si } \vec{p} \parallel \vec{E} \quad \text{le moment de torsion 'tire' le dipôle pour l'aligner avec le champ externe}$$



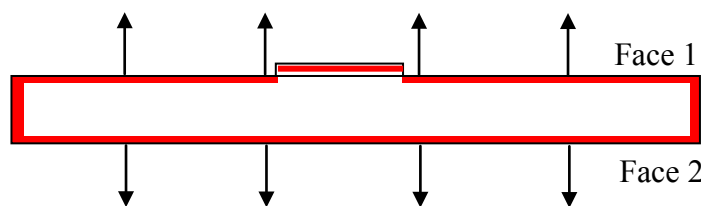
## Pression électrostatique

**Problème 1** : Petit disque sur un plan conducteur ; en augmentant de la charge du plan, il existe une charge critique au-dessus de laquelle le disque se soulève brusquement. Pourquoi ?

1. Le plan et le disque sont chargés :



2. Les charges se distribuent uniformément (le plan est large) avec une densité surfacique  $\rho_s$  :



Les charges sur face 1 n'exercent aucune force sur les charges du disque :

- Les composantes horizontales s'annulent ;
- Il n'y a pas de composantes verticales (le disque est mince)

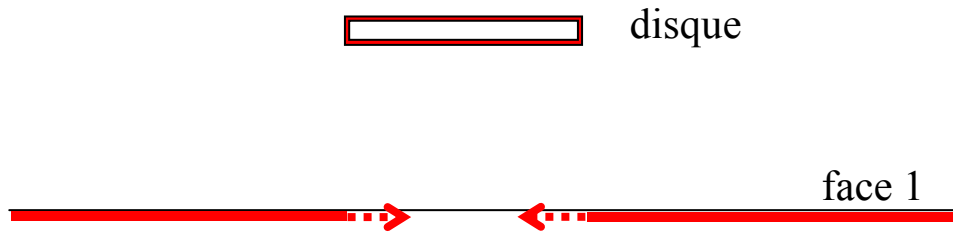
Les charges sur face 2 exercent une force verticale

$$F = \underbrace{\rho_s S}_{\text{charge du disque}} E = \rho_s S \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} ; \quad P = \frac{F}{S} = \frac{\rho_s^2}{2\epsilon_0} : \quad \text{la pression}$$

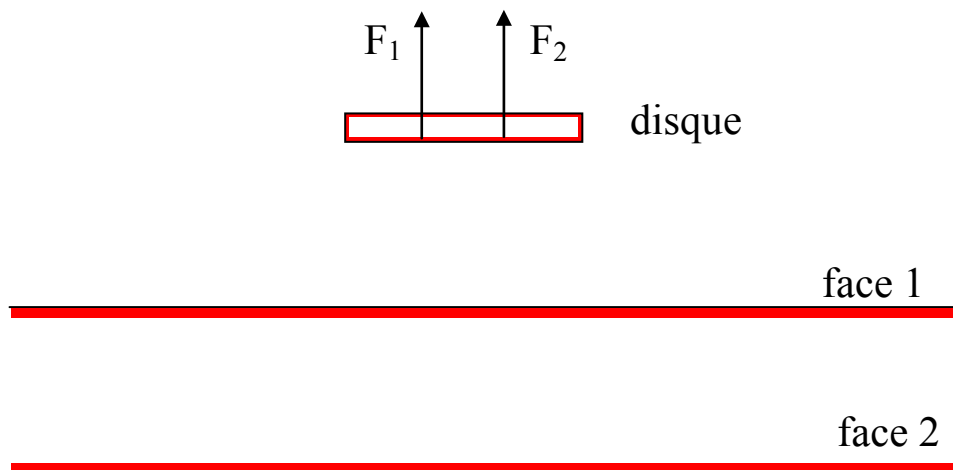
3. Le disque se soulève quand  $\frac{\rho_s^2}{2\epsilon_0} S = mg \Rightarrow \rho_s^2 = 2\epsilon_0 g \frac{m}{S}$ .

La charge totale sur le disque  $q = S\rho_s = \sqrt{2\epsilon_0 gmS}$ .

4. Quand le disque perd contact avec le plan, les charges sur face 1 se précipitent pour occuper la place libérée, repoussées par les autres charges :



En négligeant l'influence du disque sur la distribution des charges du plan, les charges de disque sont repoussées par deux forces créées par les deux plans charges :

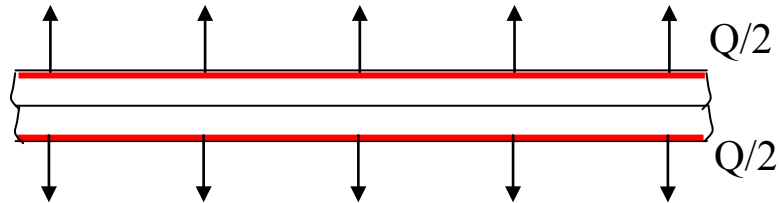


$$F = F_1 + F_2 = q_{\text{disque}} 2E_1 = q_{\text{disque}} \frac{\rho_{\text{plan}}}{\epsilon_0} \text{ (2 fois plus grand !)}$$

**Problème 2 :** Deux plans conducteurs : en chargeant des plans, ils se séparent, mais doucement

$$E = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} = \frac{Q/2}{2\epsilon_0 S}$$

chaque plan exerce une force sur l'autre, avec une pression électrostatique :



$$P_E = \frac{F}{S} = \frac{(Q/2)E}{S} = \rho_s \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} ; \quad F = \frac{\rho_s^2}{2\epsilon_0} S = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S}$$

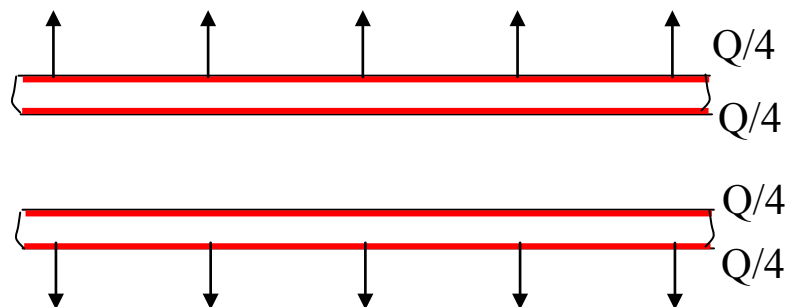
la pression gravitationnelle :  $P_G = \frac{mg}{S}$

Les plans se séparent quand

$$P_E = P_G \quad \Leftrightarrow \quad \frac{mg}{S} = \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S^2} \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{8\epsilon_0 S mg}$$

Après la séparation des plans des charges se redistribuent, mais la force ne change pas (les quantités avec tilde – après la séparation) :

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \left( \frac{Q}{4} + \frac{Q}{4} \right) \tilde{E} \\ &= \frac{Q}{2} 2 \frac{\tilde{\rho}_s}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2} \frac{S}{\epsilon_0} \\ &= \frac{Q^2}{8\epsilon_0 S} = F \end{aligned}$$



**Problème 3** : Une sphère et un disque, ayant un degré de liberté :

En chargeant la sphère, le disque se soulève, mais il s'arrête dans une position équilibrée, qui dépend de la charge de la sphère.

$r > R$  :

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$F_E = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$F_G = mg$$

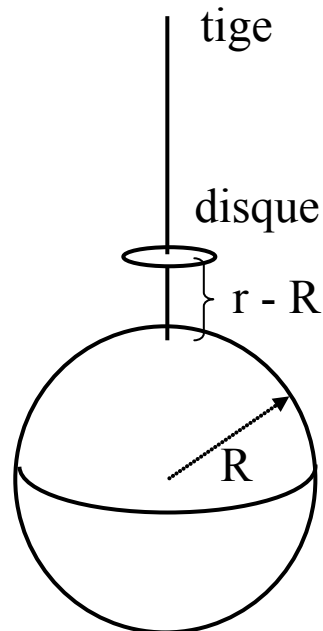
en équilibre :

$$mg = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow r^2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 mg} ;$$

si  $r < R$ , le disque reste sur la sphère ; quand  $r = R$ , il commence à se soulever :

$r = R$  :

$$E = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \quad F_E = \frac{qQ}{8\pi\epsilon_0 R^2}$$

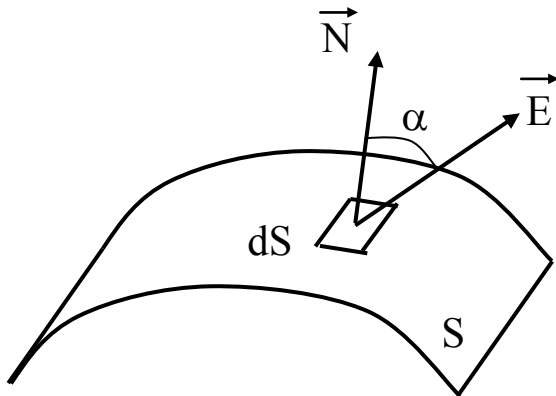


## Flux du champ électrostatique

Flux (def. générale) la quantité de qqch. à travers une surface

⇒ Le flux parallèle à une surface est nul

Le flux élémentaire d'un vecteur  $\vec{E}$  à travers d'une surface élémentaire  $dS$  :



$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{N}_S dS \quad [\text{Vm}]$$

$$= E \cos \alpha dS$$

$\vec{N}_S$  - la normale de  $dS$   
(le signe – convention, mais attn. - continuité)

surface fermée :

$\vec{N}_S$  vers l'extérieur

Observations :

1.  $d\Phi$  (et  $\Phi$ ) : scalaire (i.e., un nombre !)

2.  $\Phi = E_{\perp S} dS = E dS_{\perp E}$

3.  $\vec{E} // S \Rightarrow \Phi = 0$

4.  $E$  et  $S$  sont additifs  $\Rightarrow \Phi$  est additif

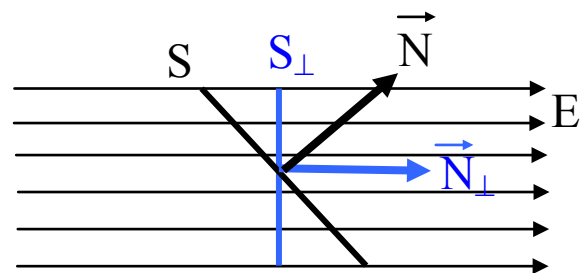
$$\left[ \begin{array}{l} \Phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{N} dS \\ \Phi_{\Sigma} = \sum_j \vec{E}_j \cdot \vec{N} dS = \sum_j \Phi_j \end{array} \right.$$

e.g. champ uniforme

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{N}_S dS = E dS \cos \alpha$$

$$= E dS_{\perp}$$

(pour  $S$  inclinée  $\cos \alpha < 1$ ,  
mais  $S > S_{\perp}$ )



## Flux du champ d'une charge ponctuelle

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{dS \cos \alpha}{r^2} ;$$

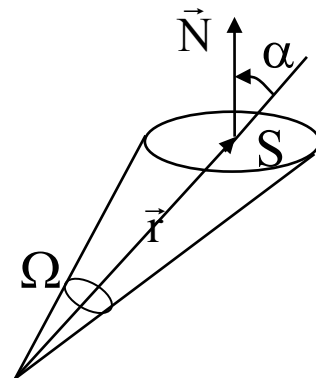
$$\frac{dS \cos \alpha}{r^2} = d\Omega \text{ - l'angle solide sous}$$

lequel on voit dS de point  $\vec{r} = 0$

$$\Rightarrow d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q d\Omega$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

$\Phi$  dépend seulement de l'angle solide  
et non de la surface !



Donc  $\Phi$  est le même pour toutes les surfaces ayant  $\Omega$  constant

Explication :

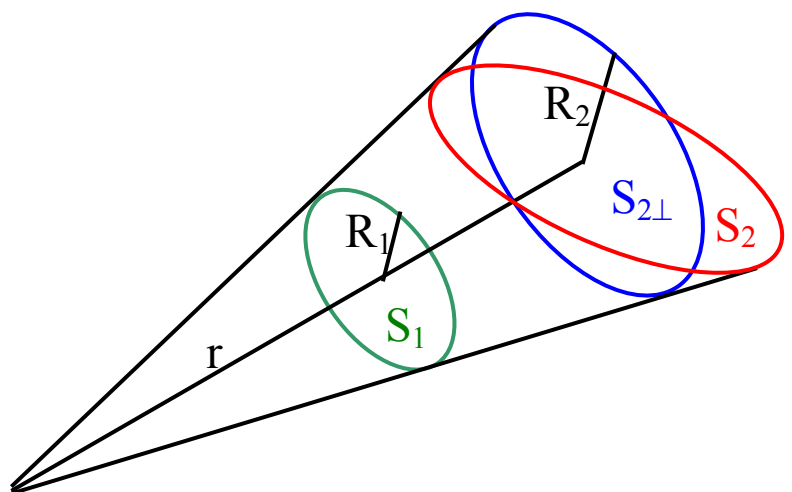
$$1. \Phi_2 = \Phi_{2\perp}$$

$$2. S_{2\perp} \propto R_2^2 \propto r_2^2 ;$$

$$S_1 \propto R_1^2 \propto r_1^2$$

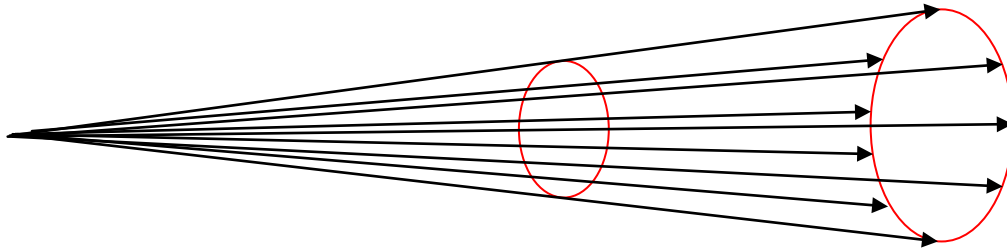
$$3. E \propto \frac{1}{R^2}$$

$$\Rightarrow E S_{\perp} = \text{cte}$$



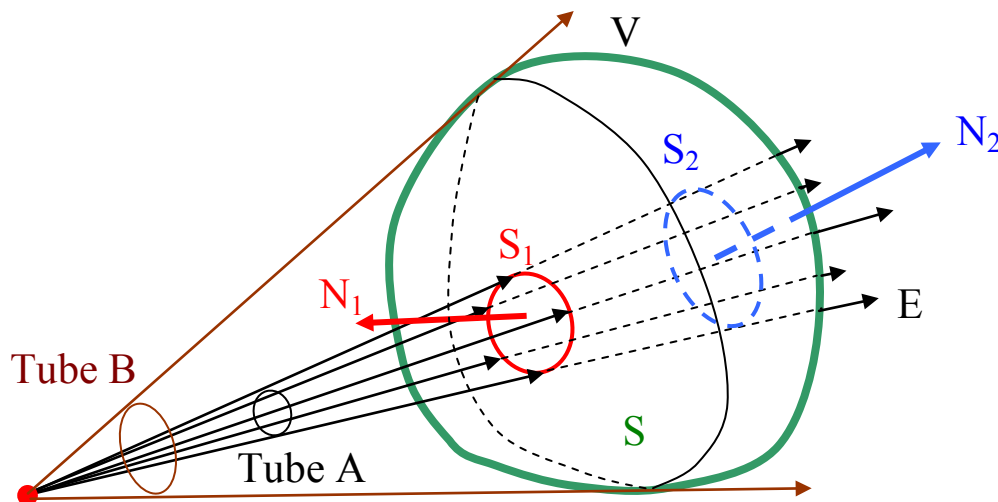
## Surfaces fermées

**Tube** des lignes de champ : l'ensemble des lignes qui s'appuient sur un contour fermé :



$\vec{N}_S$  vers l'extérieur

L'intersection du tube et d'une surface fermée : deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$



I. Charge à l'extérieur :  $\Phi_{S1} < 0, \Phi_{S2} > 0$  ; même tube :  $|\Phi_{S1}| = |\Phi_{S2}|$

$$\Phi_{\text{tube A}} = \Phi_{S1} + \Phi_{S2} = 0 \quad \text{pour } \forall \text{ tube,}$$

Vrai pour tube B, ayant support S, la coupe transversale de V

II. Charge à l'intérieur :

L'angle solide de la sphère à l'intérieur  $\Omega_{\text{total}} = 4\pi$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (\text{donc } 4\pi \text{ dans la constante de Coulomb})$$

## Théorème de Gauss

Généralisation de  $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$  pour un système général de charges:

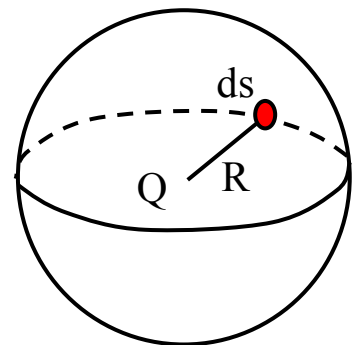
$\Phi$  est additif, donc pour un ensemble de charges  $\{q_j\}$  :

$$\Phi_S = \sum_j \Phi_{S,j} = \sum_{j \in V_S} \Phi_{S,j} + \sum_{j \notin V_S} \Phi_{S,j} = \sum_{j \in V_S} \Phi_{S,j} = \frac{\sum_{j \in V_S} q_j}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{int érne}}}{\epsilon_0}$$

Le flux total de vecteur de champ électrostatique sortant d'une surface fermée est égal au quotient par  $\epsilon_0$  de la somme de charges électriques situées à l'intérieur.

Preuve direct à partir de la loi de Coulomb pour une sphère chargée uniformément :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{N} ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \overbrace{\iint_S ds}^{= 4\pi R^2} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Observations :

1.  $Q_V = 0 \Leftrightarrow \Phi_S = 0$
2.  $\Phi_S$  ne dépend de la configuration de charges ni à l'intérieur ni à l'extérieur
3. A l'intérieur d'une sphère avec des charges surfaciques uniformes

$\vec{E} \equiv 0$  : Soit  $S_R$  avec le même centre et  $r < R \Rightarrow \Phi = 0$

Symétrie radiale  $\Rightarrow \vec{E}$  radial  $\Rightarrow \Phi = |\vec{E}| \iint_{S_R} ds = 4\pi r^2 |\vec{E}| \Rightarrow E = 0$



## L'importance du théorème de Gauss

1. Il représente une forme intégrale d'une d'équations de Maxwell (on verra plus tard)
2. Il est très utile pour déterminer le champ pour les systèmes ayant une symétrie élevée.

Exemple 1 : Champ d'une **sphère chargée uniformément** (TD)

Symétrie radiale:  $\begin{cases} \vec{E} \parallel \vec{R} \\ \vec{E} = \vec{E}(R) \end{cases}$

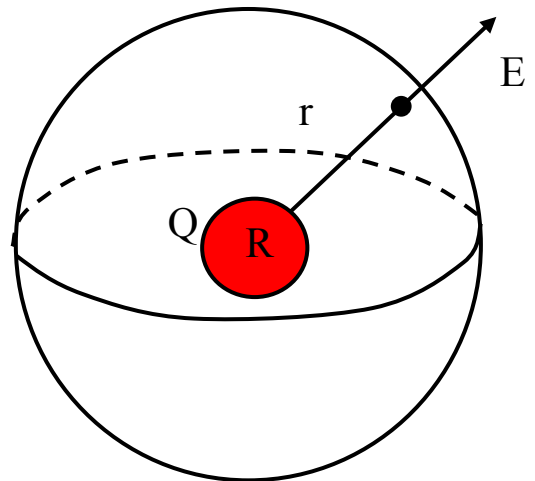
Gauss :  $\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$

Def :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{N} ds = E(r) \iint_S ds = 4\pi r^2 E$$

Donc

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \begin{array}{l} \text{--- Charges surfaciques uniformes} \\ \text{--- Charges volumiques uniformes} \end{array}$$



En fait, il suffit d'avoir une distribution radiale de charges  $\rho_v = \rho_v(r)$  pour préserver la symétrie radiale

Champ à l'intérieur :  $r < R$

I. Charge surfacique :  $\vec{E} \equiv 0$  (déjà fait)

II. Charge volumique uniforme :  $\Phi = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{Q(R)r^3}{\epsilon_0 R^3} = \frac{Q_{\text{totale}} r^3}{\epsilon_0 R^3}$

$$\Phi = 4\pi r^2 E \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{totale}}}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad \text{--- dépendance de r linéaire}$$

$$E(r=R) = \frac{Q_{\text{totale}}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \equiv E_{\text{extérieur}}(R)$$

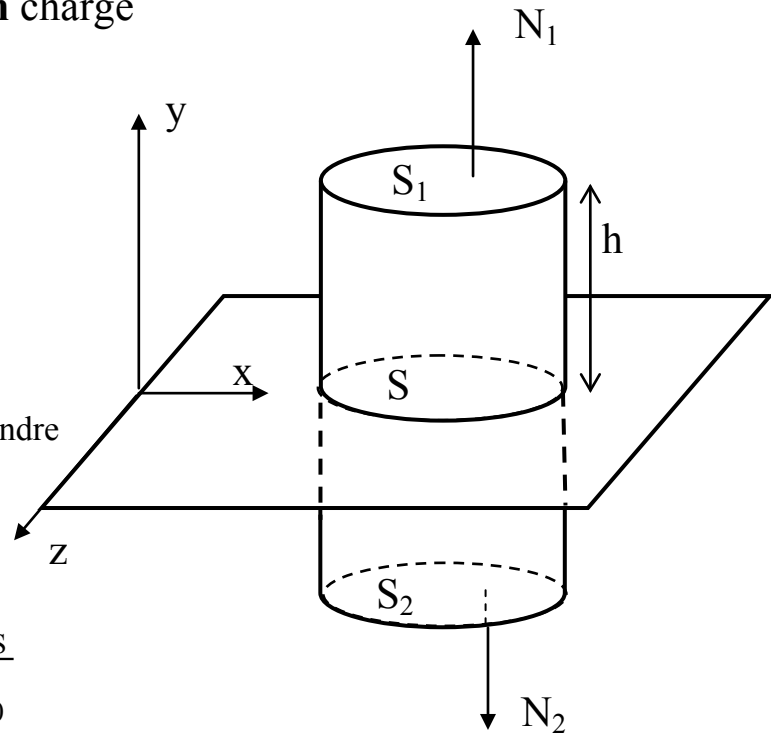
Exemple 3 : Champ d'un **plan** chargé

$$\text{Symétrie : } \begin{cases} E \perp S \\ \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \\ E^+ = -E^- \end{cases}$$

$$\text{Gauss : } \frac{\rho_s S}{\epsilon_0} = \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{\text{cylindre}}$$

$$\text{Def : } = 2\Phi_1 = 2E^+(h)S$$

$$\Rightarrow E^+ = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \Rightarrow \Delta E_N = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

Exemple 2 : Champ d'un **fil** chargé

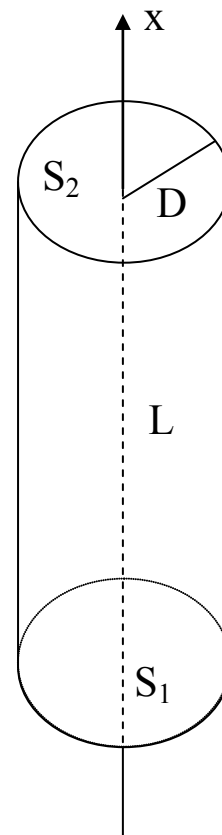
$$E \perp x$$

$$\text{Symétrie : } \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \\ E = E(r) \end{cases}$$

$$\text{Gauss : } \frac{\rho_\ell L}{\epsilon_0} = \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{\text{cylindre}}$$

$$\text{Def. } = \Phi_{\text{cylindre}} = E 2\pi D L$$

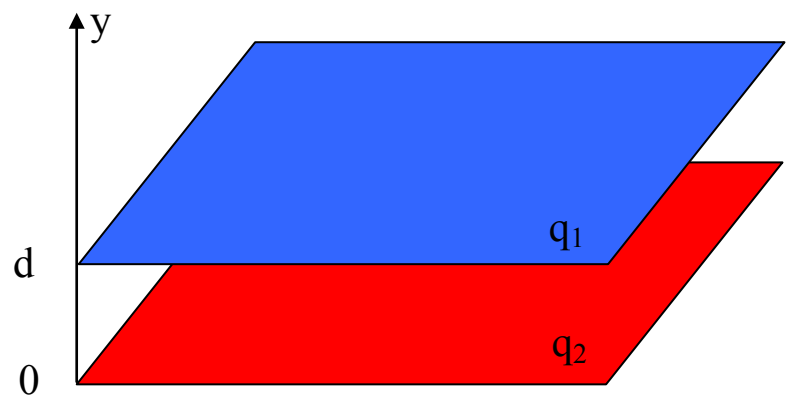
$$\Rightarrow E = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0 D}$$



Exemple 4 : Champ de **deux plans** parallèles

$$E_1 = \begin{cases} +\frac{q_1}{2\varepsilon_0} & y > d \\ -\frac{q_1}{2\varepsilon_0} & y < d \end{cases}$$

$$E_2 = \begin{cases} +\frac{q_2}{2\varepsilon_0} & y > 0 \\ -\frac{q_2}{2\varepsilon_0} & y < 0 \end{cases}$$



Condensateur :

$$q_1 = -q_2 = -q$$

$$y > d : \quad E = \frac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0}$$

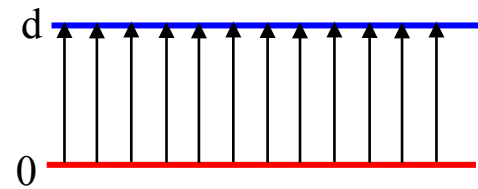
$$E = 0$$

$$0 < y < d : \quad E = -\frac{q_1 - q_2}{2\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$y < 0 : \quad E = -\frac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0}$$

$$E = 0$$



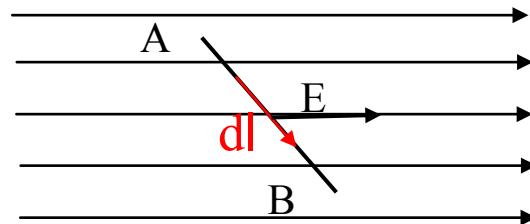
## Energie et potentiel du champ électrostatique

Charges actives  $\longrightarrow$  champ  $\longrightarrow$  force  $\xrightarrow{\text{maintenant}}$  travail

Soit  $\vec{E}$  **homogène** (= cte). Le **travail**  $\Delta W$  nécessaire pour déplacer une charge  $q_0$  entre les points A et B, est :

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \vec{L}_{AB} = q_0 \vec{E} \cdot \Delta \vec{\ell} .$$

$$(dW = \vec{F} \cdot d\vec{\ell})$$



Inversement, le travail effectué contre le champ a le signe opposé.  
Le travail fait par le champ par charge unitaire s'appelle **différence de potentiel** entre B et A (le travail nécessaire pour déplacer une charge négative unitaire) :

$$\Delta V = V_B - V_A = -\frac{\Delta W_{BA}}{q_0} = -\vec{E} \cdot \Delta \vec{\ell} \quad \left[ \frac{J}{C} \equiv V \right] .$$

### Remarques :

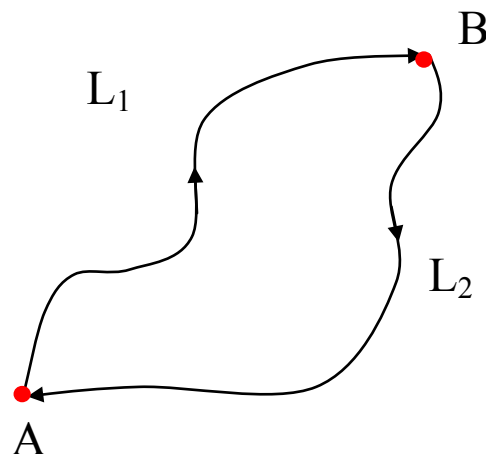
1.  $1\text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ [CV=J]}$  l'énergie gagnée par l'électron quand il se déplace de 1m dans champ de 1 V
2. V s'appelle **potentiel** du champ sur un point et est défini à une constante près, car ce qui compte sont les différences de potentiel
3. Convention de signe : le signe  $-$  signifie que si une charge  $+$  se déplace contre  $E$  son énergie augmente et  $\Delta V > 0$ .  
Donc, les lignes de champ pointent en direction de la diminution de potentiel (les lignes sont dans le sens de potentiel décroissant).
4. Déplacement à travers le champ ne fait pas de travail, équivalent au déplacement horizontal dans le champ gravitationnel. Donc, sur les surfaces  $S \perp \vec{E} \implies V = \text{cte}$  :  
Ces sont des surfaces **équipotentielles**.  
(et elles sont perpendiculaires aux lignes du champ)

Cas général : **champ non-uniforme**
 $\Delta \vec{L} \Rightarrow d\vec{\ell} \rightarrow 0 : E \text{ est uniforme sur } d\vec{\ell}$ 

$$W_{BA} = \int_A^B dW = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \implies V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Remarque : le champ électrostatique est **conservatif** – le travail ne dépend pas du chemin

Champ conservatif



Champ non-conservatif

$$W_{BA(L_1)} = W_{BA(L_2)}$$

$$W_{BA(L_1)} \neq W_{BA(L_2)}$$

$$W_{BA} + W_{AB} = 0$$

$$W_{BA} + W_{AB} \neq 0$$

pour  $\forall$  chemin

l'énergie sur A n'est pas la même  
après un aller- retour (e.g. friction)

Preuve pour une région de champ uniforme :

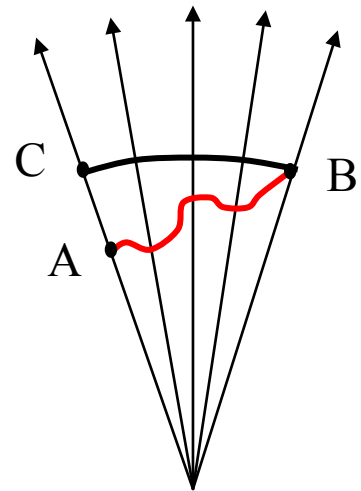
$$W_{BA} = \int_A^B dW = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q_0 \int_A^B E d\ell = q_0 E \int_A^B d\ell = q_0 E AB = q_0 \vec{E} \cdot \vec{AB}$$

## Potentiel d'une charge ponctuelle

$$W_L = W_{L\parallel} + \cancel{W_{L\perp}} = W_{L\parallel}$$

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_A^C E dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_A} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned}$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} + \text{cte}$$



convention Coulombienne :

$$V(\infty) = 0 \Leftrightarrow \text{cte} = 0: \text{l'énergie à l'infini est } 0$$

**L'énergie potentielle** : l'énergie obtenue en déplaçant une charge passive  $q_0$  de  $r$  au point avec potentiel zéro :

$$U(r) = q_0 V(r) \stackrel{\text{charge ponctuelle}}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r}$$

**Relation différentielle :**  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

1.  $dV$  – différentielle totale d’une fonction scalaire de trois variables,

$$\text{donc } dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Notations :  $\vec{\text{grad}} V \equiv \vec{\nabla} V \equiv \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$

2.  $d\vec{\ell} = (dx, dy, dz) \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E_x dx + E_y dy + E_z dz$

3.  $x, y$  et  $z$  sont indépendantes

donc  $\boxed{\vec{\text{grad}} V = -\vec{E}}$

avantage :  $V$  scalaire et  $E$  est obtenu par différentiation

Qqch. d’utile :  $\boxed{\vec{N}_S = \vec{\text{grad}} S}$

$S(x, y, z) = \text{cte}$  : l’équation de surface  $S$

$\vec{N}_S$  : le vecteur normal à  $S$

$S(\vec{r}) = c^{\text{te}} \Rightarrow dS = 0$  : l’équation de la surface  $S$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial y} dy + \frac{\partial S}{\partial z} dz = \vec{\text{grad}} S \cdot d\vec{r}$$

$\Rightarrow \vec{\text{grad}} S \cdot d\vec{r}_S = 0$  pour les déplacements  $d\vec{r}_S$  parallèlement à la surface

$$\Rightarrow \vec{\text{grad}} S \perp \vec{r}_S$$

surfaces équipotentielles :  $V = \text{cte}$  ;  $\vec{\text{grad}} V = -\vec{E}$ , donc

$\vec{E} \perp V_{\text{cte}}$  : sens physique – l’énergie potentielle ne change pas en se déplaçant à travers du champ

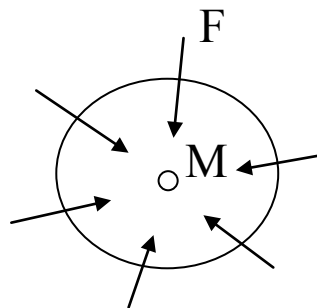
**Extremum** du potentiel : Si  $V$  a un extremum sur  $M$ ,  $M$  est chargé.

Supposons que  $V$  a un minimum. Sur chaque point d'une petite surface  $S$  autour de  $M$  :  $V_S > V_M$ , donc toutes les lignes de champ se dirigent vers l'intérieur et par application du théorème de Gauss à l'intérieur de  $S$  il y a une charge négative. En prenant la limite  $S \rightarrow 0$ , la charge se situe sur  $M$ . Inversement, l'existence d'une charge positive sera signalée par un maximum.

Conséquence : L'équilibre stable d'une charge dans un champ électrostatique n'est pas possible !

L'équilibre stable nécessite que le potentiel a un minimum local : tous les petits déplacements doivent 'tirer' la charge vers la position de l'équilibre stable, donc pour une charge positive toutes les lignes du champ créé par des autres charges doivent pointer vers l'intérieur, donc le potentiel a un minimum, donc il existe une autre charge dans cette position !

Un point d'équilibre  $M$  : toutes les forces  $F$  doivent pointer à l'intérieur



Donc, par conséquence du théorème de Gauss  $\Phi_S \neq 0$ ,  
 $S$  – arbitraire autour  $M$ .

$S \rightarrow 0 \Rightarrow M$  est chargé !

Donc, les points d'espace sans charges ne peuvent pas être des position d'équilibre stable.



**La preuve générale que le champ électrostatique est conservatif**

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$$

$$W_{BA} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}_L = - \int_A^B \vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{\ell}_L = - \int_A^B dV = -V(B) + V(A)$$

donc  $W_{BA}$  ne dépend pas du chemin

## Potentiel d'une distribution (discrète ou continue) des charges

I. Voie **directe** : par sommation ou intégration (plus facile que E : V est scalaire !)

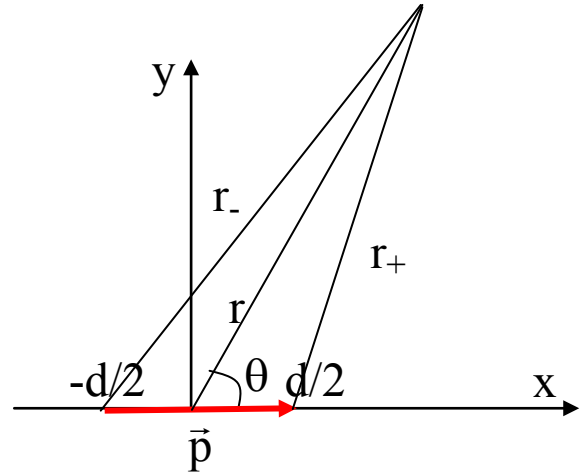
II. Depuis E :  $\vec{\text{grad}} V = -\vec{E}$

III. Depuis  $\rho$  : plus tard

Exemple: **dipôle** électrostatique

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_- r_+}$$

$$\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d \cos \theta}{r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



Attention : V écrit comme ça est une fonction de r et  $\theta$ .

Dans le système des coordonnées sphériques :  $\vec{\nabla} = \vec{r} \frac{\partial}{\partial r} + \vec{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$

Donc :  $E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$  ,  $E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

Lignes de champ :

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta} = 2 \frac{d \sin \theta}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow r = C \sin^2 \theta$$

Surfaces équipotentiels :

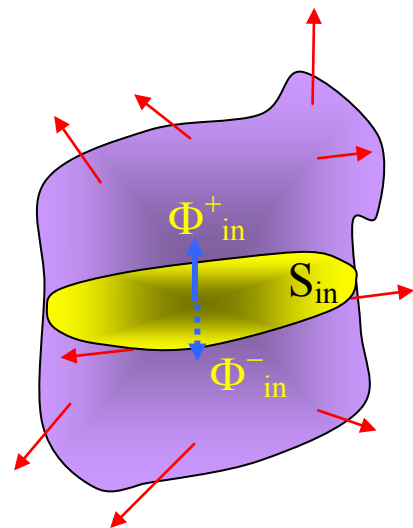
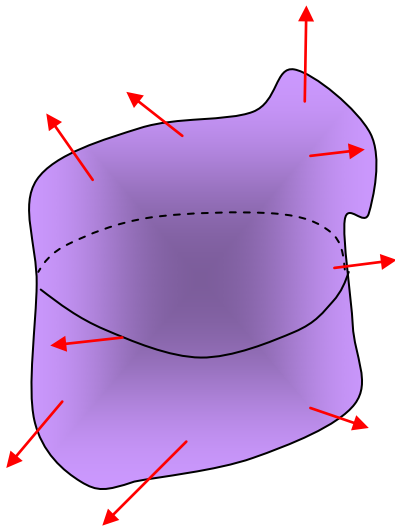
$$V = \text{cte}$$

$$\Rightarrow r^2 = C \cos \theta$$

Observations pour les surfaces équipotentielles:

1. Surfaces sont fermées
2. Ne se croisent pas ( $V$  – unique)
3. A côté des charges : sphère

## Théorème d'Ostrogradski et la présentation différentielle du théorème de Gauss



$F(x,y,z)$  – une fonction vecteur

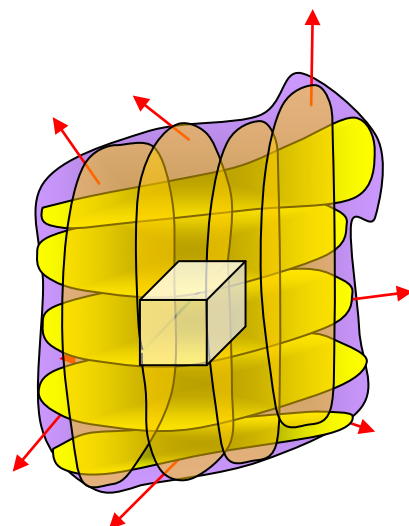
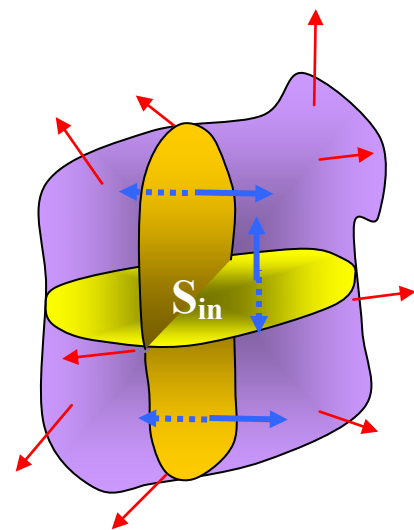
$$\Phi = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\Phi_{in}^+ = -\Phi_{in}^-$$

$$\sum_{j=1}^N \oint_{S_j} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Phi$$

$$\Phi_j = \oint_{S_j} \vec{F} \cdot d\vec{s} \xrightarrow{V_j \rightarrow 0} ?$$

On vera que la limite existe et est proportionnelle à  $V_j$  :



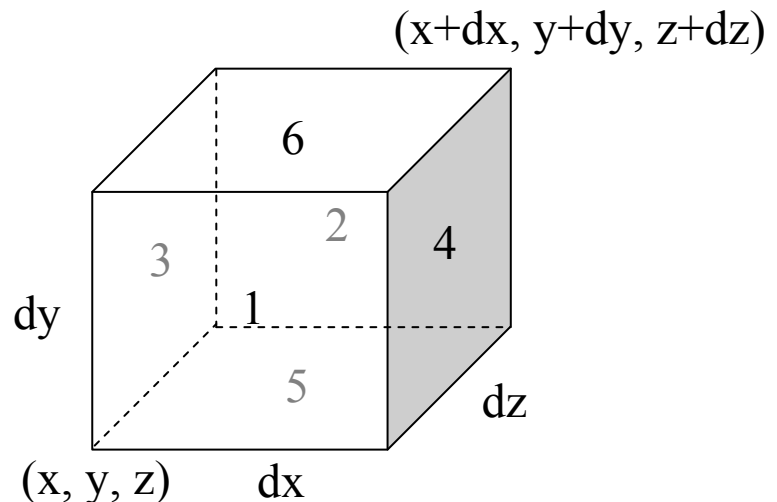
$$(ds \propto r^2, \Delta F \propto rdF/dr, V \propto r^3)$$

$$\text{def.} \quad \text{div} \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\int_V \vec{F} \cdot d\vec{s}}{V} \quad (\text{si elle existe}).$$

Coordonnées cartésiennes :

faces :

- 1 – en face
- 2 – au fond
- 3 – à gauche
- 4 – à droite
- 5 – en bas
- 6 – en haut



$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 + \Phi_6 =$$

$$\approx F_z(x, y, z) dx dy - F_z(x, y, z - dz) dx dy$$

$$- F_x(x, y, z) dy dz + F_x(x + dx, y, z) dy dz$$

$$- F_y(x, y, z) dx dz + F_y(x, y + dy, z) dx dz$$

$$F_z \text{ continue : } F_z(x, y, z + dz) \approx F_z(x, y, z) + dz \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\Phi}{dV} = \frac{\left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dx dy dz}{dx dy dz} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\text{mais } \vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Rightarrow \boxed{\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}}$$

$$\Phi \equiv \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \sum_{j=1}^N \oint_{S_j} \vec{F} \cdot d\vec{s} \xleftarrow{V_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^N V_j \operatorname{div} \vec{F} \equiv \int_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV$$

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV \quad \text{- théorème d'Ostrogradski-Gauss}$$

Application : Flux de champ électrique

$$\Phi_E \equiv \oint_S \vec{E} \cdot \vec{N} ds = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \frac{Q_V}{\epsilon_0} \quad \text{représentation intégrale de}$$

théorème de Gauss pour le champ électrique

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0} \quad \text{pour chaque } V$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{représentation différentielle}$$

Rappel :  $\vec{E} = -\nabla V$ ,  $V$  – potentiel de champ électrique

$$\Delta V \equiv \nabla^2 V \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{l'équation de Poisson}$$

\ opérateur  
Laplacien

Dans les régions  
sans charges :

$$\Delta V = 0 \quad \text{- l'équation de Laplace}$$

A partir de représentation intégrale ou différentielle on peut obtenir la loi de Coulomb.

Exemple :

Loi de Coulomb – hypothèse  $V \propto \frac{1}{r^n}$ ,  $n = ?$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^n} = -n \frac{1}{r^{n+1}} \frac{x}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r^n} = -n \frac{r^{n+2} - x(n+2)r^{n+1} \frac{x}{r}}{(r^{n+2})^2} = -n \frac{1 - (n+2) \frac{x^2}{r^2}}{r^{n+2}}$$

$$\Rightarrow \Delta \frac{1}{r^n} = -n \frac{3 - (n+2)}{r^{n+2}} ;$$

pour que  $\Delta \frac{1}{r^n} = 0$  il faut  $n = 0$  ou  $1$

$n = 1$  – loi de Coulomb

$n = 0$  –  $V = \text{cte}$ ,  $E = 0$

Problème :

dans le théorème d'Ostrogradski-Gauss F – continue

si

$F_z$  discontinue (e.g. charge surfacique sur le plan x-y) :

$$F_z(x, y, z + dz) \approx F_z(x, y, z) + J(F_z) + dz \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

(J – saut de  $F_z$ )

$$F_z(x, y, z) dx dy - F_z(x, y, z - dz) dx dy \approx J(F_z) dx dy$$

mais  $J(E_z) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{J(E) dy dz}{dv} = \frac{\rho}{\epsilon_0 dz} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$$

( $\rho_s$  est la charge dans une couche dz)

La mathématique plus sophistiqué :

Charge surfacique

$$E_z = \pm \frac{\rho}{2\epsilon_0} = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} + \frac{\rho}{\epsilon_0} \theta(z) \quad \theta(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1, & z > 0 \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \theta'(z) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \delta(z) \equiv \frac{\rho_s}{\epsilon_0} ;$$

$\delta(z)$  - fonction de Dirac



## L'énergie potentielle électrostatique d'une distribution de charges

Def.  $W$  est l'énergie nécessaire pour apporter des charges situées à l'infinité aux positions associées au système physique étudié (l'énergie propre)

1-ère charge :  $W_{(1)} = W_{11} = 0$

2-ème charge :  $W_{(2)} = W_{21} = q_2 V_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{21}}$

3-ème charge :  $W_{(3)} = W_{31} + W_{32} = q_3 [V_2(\vec{r}_3) + V_1(\vec{r}_3)]$

.....

N-ème charge :  $W_{(j)} = \sum_{i=1}^{j-1} W_{ji}$

Totale :

$$W = \sum_j \sum_{i < j} W_{ji}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_j \left( \sum_{i < j} W_{ji} + W_{ij} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} \sum_i W_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i$$

$V_i$  est le potentiel créé par toutes les autres charges dans la position de la  $i$ -ème

Distribution **continue** :  $W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}} \rho V d\mathcal{R}$  où  $\mathcal{R}$  est la région des

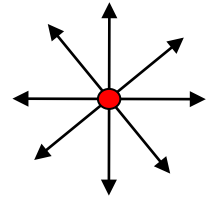
charges (volume, surface, ligne)

## Discontinuité de champ

Dans une région **sans charges** E et V sont **continus** (pourquoi ?)

1. Charge **ponctuelle** : E et V – singuliers ( $\rightarrow \infty$ )

$$E \propto \frac{1}{r^2}, \quad V \propto \frac{1}{r}$$



2. Charge **linéique** :  $E \propto \frac{1}{r}$  : singulier



$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow V = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + C : \text{singularité logarithmique}$$

Remarque 1 :  $C \neq 0$  car à l'infinie il y a des charges

Remarque 2 : E et V ont la même singularité pour des charges linéiques non-uniformes et des lignes arbitraires

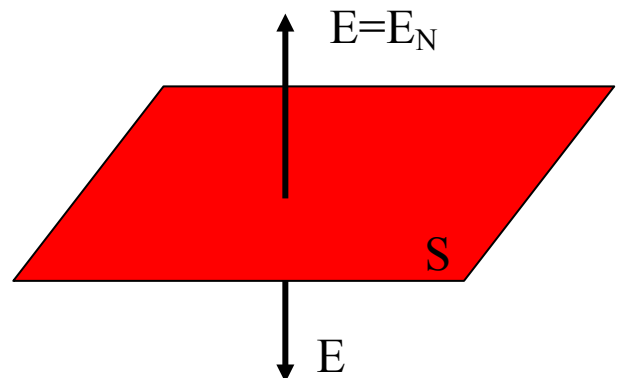
3. Charge **surfactive** :

Exemple 1 :

Plan chargé uniformément

$$E_T \equiv E_x = 0 \Rightarrow E_T \text{ continu}$$

$$E_N \equiv E_y = \begin{cases} +\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} & , y > 0 \\ -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} & , y < 0 \end{cases}$$



$$\Delta E_N \equiv E_N^+ - E_N^- = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

$$V = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} y$$

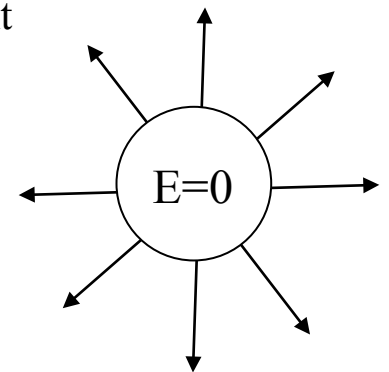
!  $V(y \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \mp\infty$  et n'est pas nul – la convention Coulombien ne marche pas (il y a des charges à l'infini)

Exemple 2 : Surface sphérique chargée uniformément

A l'intérieur :  $E_N = E_T = 0$

A l'extérieur :  $E_T = 0$ ,  $E_N = E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_S}{\epsilon_0}$

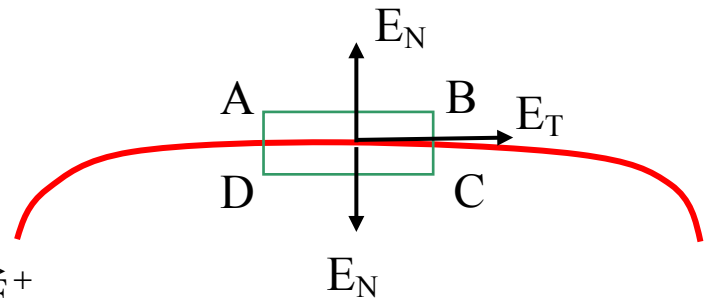
Donc  $\Delta E_N = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  et  $\Delta E_T = 0$



Cas général :

$$W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = 0$$

Si  $AB$  et  $CD \rightarrow 0$ ,  $\vec{E}(A) \rightarrow \vec{E}(B) = \vec{E}^+$   
 $\vec{E}(C) \rightarrow \vec{E}(D) = \vec{E}^-$



mais aussi  $W_{BC} + W_{DA} = 0$ , car  $BC$  et  $AD$  sont antiparallèles.

Donc

$$E_T^+ AB - E_T^- DC = 0, \text{ donc } \Delta E_T = 0.$$

Pour  $E_N$  :

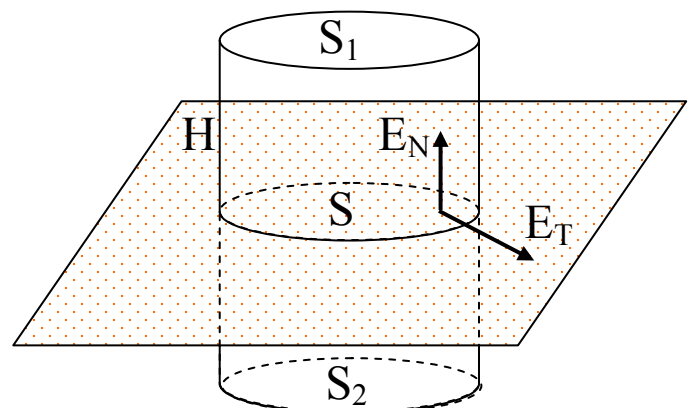
Théorème de Gauss :  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_{\text{cylindre}} = \frac{\rho_s S}{\epsilon_0}$

1.  $\Phi_{\text{cylindre}} \rightarrow 0$  si  $H \rightarrow 0$

2.  $\Phi_1 \rightarrow E_N^+ S$

3.  $\Phi_2 \rightarrow -E_N^- S$

Donc  $\Delta E_N = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$



## Type de matériaux

Conducteurs, isolants, semi-conducteurs, diélectriques, piézoélectriques, diamagnétiques, ferromagnétiques, etc.

En gros :

**conducteurs** : ceux qui sont capables de conduire l'électricité, d'avoir un courant électrique

**isolants** : qui ne peuvent pas

courant électrique – mouvement des charges dans une direction, donc il faut des charges libres : la **propriété** des conducteurs est d'avoir des charges **libres**

isolant : toutes charges sont liées

abstractions :

1. Conducteur absolu (ayant conductivité infinie) – résistance zéro ;  
Quantité des charges libres – infinie
2. Isolant absolu – pas de charges libres

Remarques :

1. Les deux peuvent être chargés ; dans les conducteurs les charges supplémentaires sont aussi libres, dans les isolants elles sont fixées.
2. Pour la majorité des conducteurs des charges libres sont des électrons, mais il y a des conducteurs ioniques (les électrolytes, les conducteurs ionique solides, le plasma)
3. L'isolant peut être polarisé (dipôles permanents et induits)

Semi-conducteurs :

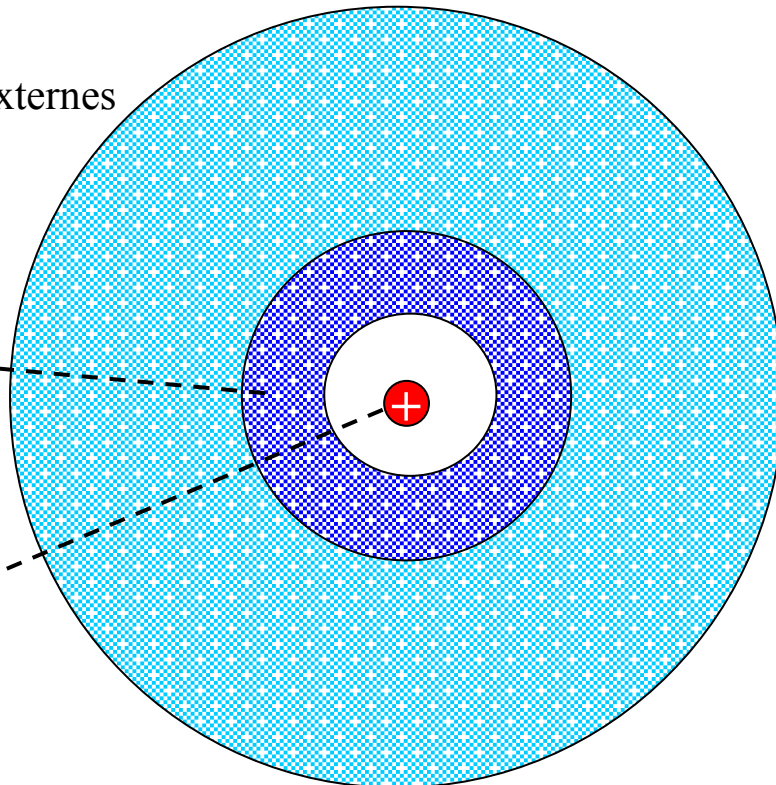
## Structure atomique et moléculaire

Atome :

électrons externes

électrons  
internes

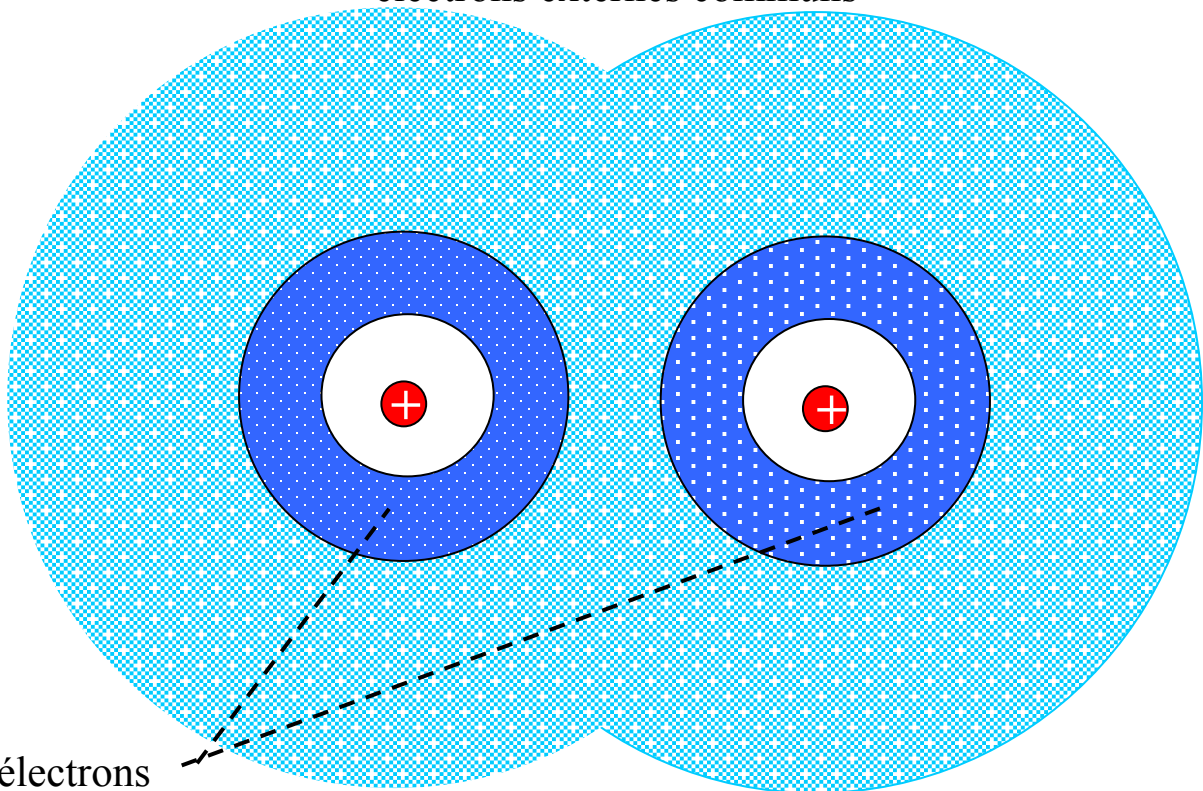
noyau



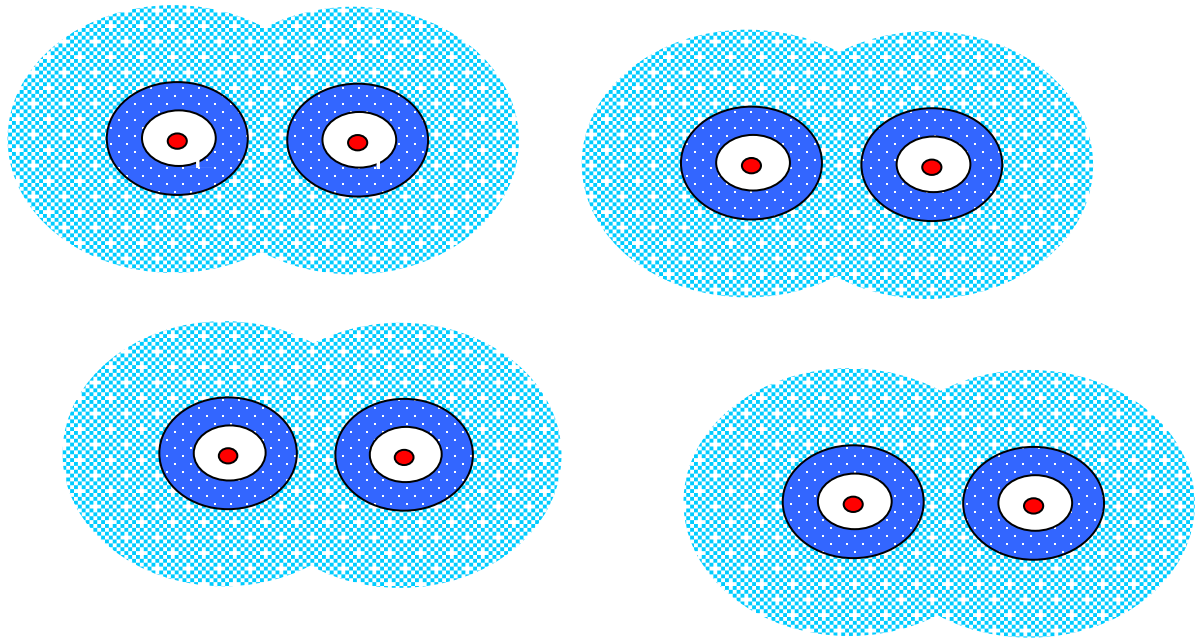
Molécule :

électrons externes communs

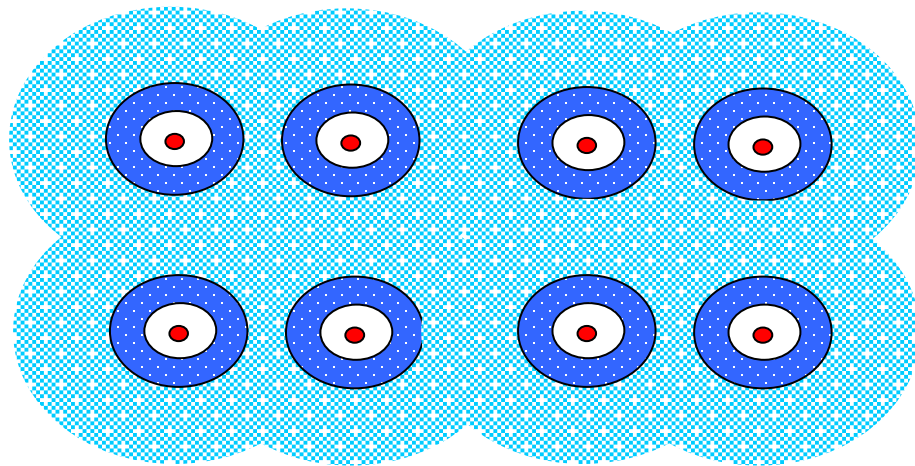
électrons  
internes



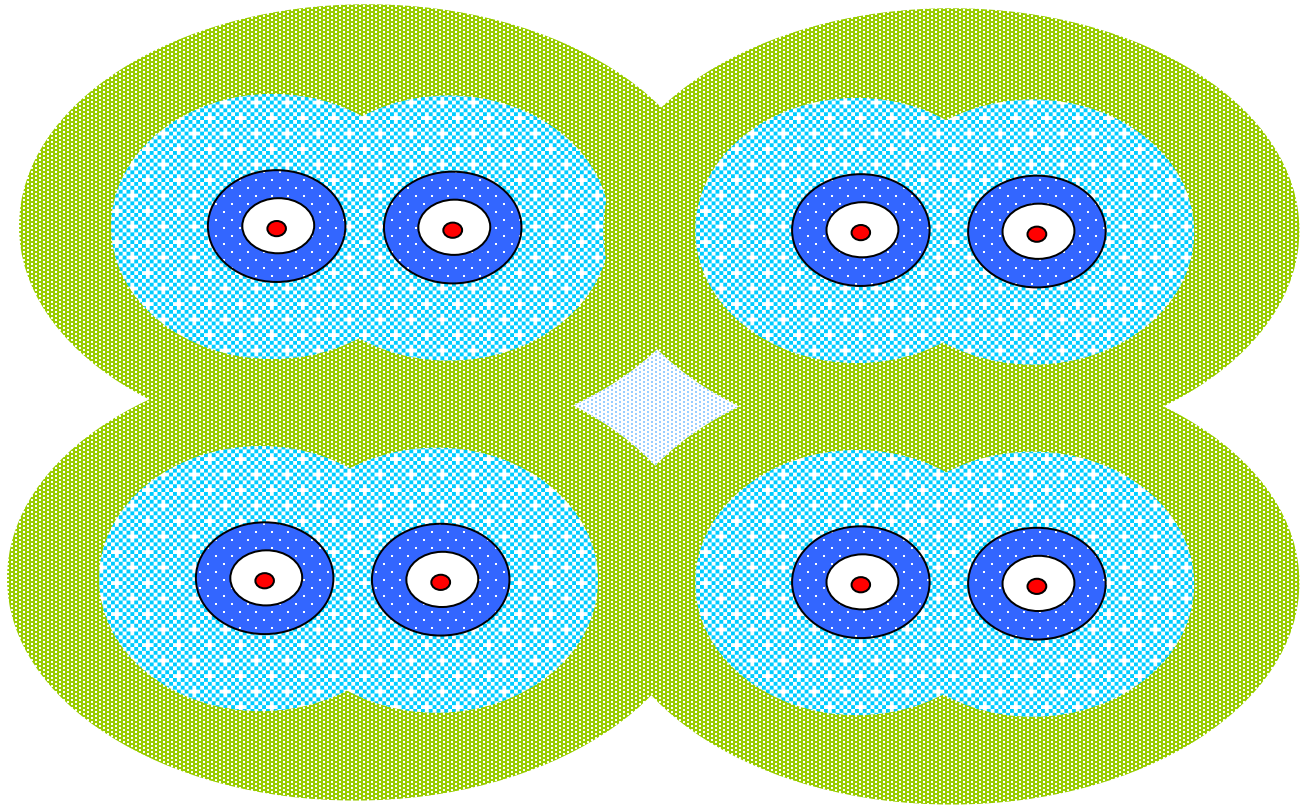
Matériau **diélectrique** : les électrons externes sont liés aux molécules séparées



**Conducteurs** : une partie des électrons externes sont partagés entre les 'molécules' (atomes) et sont communs au corps entier



**Semiconducteurs** : une partie des électrons externes en état d'excitation peuvent devenir communs au corps entier. Dans un état moins excité : comme les diélectriques



La bande énergétique d'états liés : **bande d'états liés (bande de valance)**

La bande énergétique d'états communs : bande **conductrice**

L'énergie minimale nécessaire de transférer un électron d'une bande à l'autre : **bande interdite**  $E_c$ .

Pour les métaux :  $E_c = 0$

Pour les diélectriques :  $E_c = 7 - 20 \text{ eV}$

Pour les semiconducteurs :  $E_c = 0.5 - 5 \text{ eV}$

(rappel : ça va dire qu'un électron doit être soumis au potentiel  $V = E_c/e$ )

**Remarque** : Cette énergie est différente à l'énergie **d'ionisation** nécessaire pour ejecter un électron de l'atome complètement : dans la bande conductrice l'électron reste lié aux atomes

Exemple : l'électron dans l'état énergétique le plus bas de l'atome d'hydrogène ( $r = 0.053 \text{ nm}$ ) : le champ de la force électrostatique est  $5 \times 10^{11} \text{ V/m}$  !

Pour l'air sec :  $3 \times 10^6 \text{ V/m} = 30 \text{ kV/cm}$

Les diélectriques peuvent être polarisés dans un champ électrique externe, on en a déjà parlé, et le résultat est la création des dipôles électriques caractérisés par ses moments dipolaires  $\vec{p} = \vec{p}_0 + \alpha \vec{E}$ , sauf quelques exceptions,  $\vec{p}_0 = 0$ .

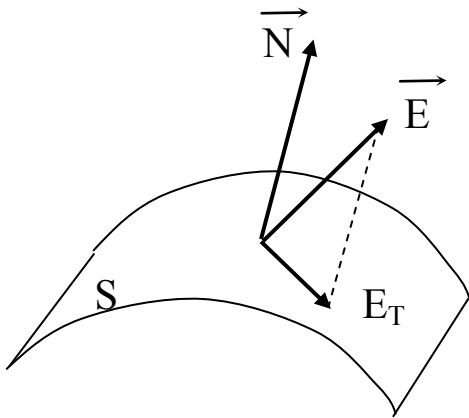


## Conducteurs dans champ électrostatique

### I. La **surface** S de conducteur : **équipotentielle** ( $V = \text{cte}$ )

Explication :  $V = \text{cte}$  sur  $S_V \Leftrightarrow \vec{E} \perp S_V$  (pas de travail fait en déplacement à travers le champ)

Si S n'est pas équipotentielle,  
 $\Leftrightarrow \vec{E}_T \neq 0$  (la composante tangente de champ).



$$\vec{E}_T \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_T = e\vec{E}_T$$

$\Rightarrow$  déplacement de charges libres ;  
redistribution de charges libres

$\Rightarrow$  création d'un nouveau champ  
par des charges redistribuées jusqu'à

$\Rightarrow$  la compensation de  $\vec{E}_T \Rightarrow \vec{E}_T = 0$  sur S

$\Rightarrow$  S est équipotentielle en équilibre

### II. A l'**intérieur** : $\vec{E} = 0$ (si non, champ va exercer une force sur les charges libres)

Conséquences :

1. Courant électrique
2. Corona décharge
3. Cages électrostatiques (cages de Faraday)

## Cage électrostatique

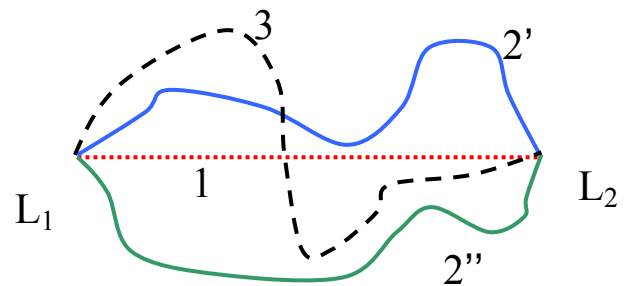
$S_{\text{metal}}$  : équipotentielle – aussi vrai pour une surface intérieure.

Sur  $S_{\text{int}}$  fermée  $V = \text{cte}$ . Si  $Q_{\text{int}} = 0$   $V_{\text{volume interne}} = \text{cte}$  aussi

**Théorème** : soit une fonction  $f$  continue et bornée dans une région  $P$  bornée et constante sur les limites  $L$  de  $P \implies f = \text{cte}$  sur  $P$  ou  $f$  a l'extremum dans  $P$  :

Ou

- 1)  $f = \text{cte}$ , ou
- 2)  $f$  a le maximum ( $2'$ )  
ou le minimum ( $2''$ )
- 3) ou les deux



On a vu que dans l'extremum de  $V$  il y a des charges

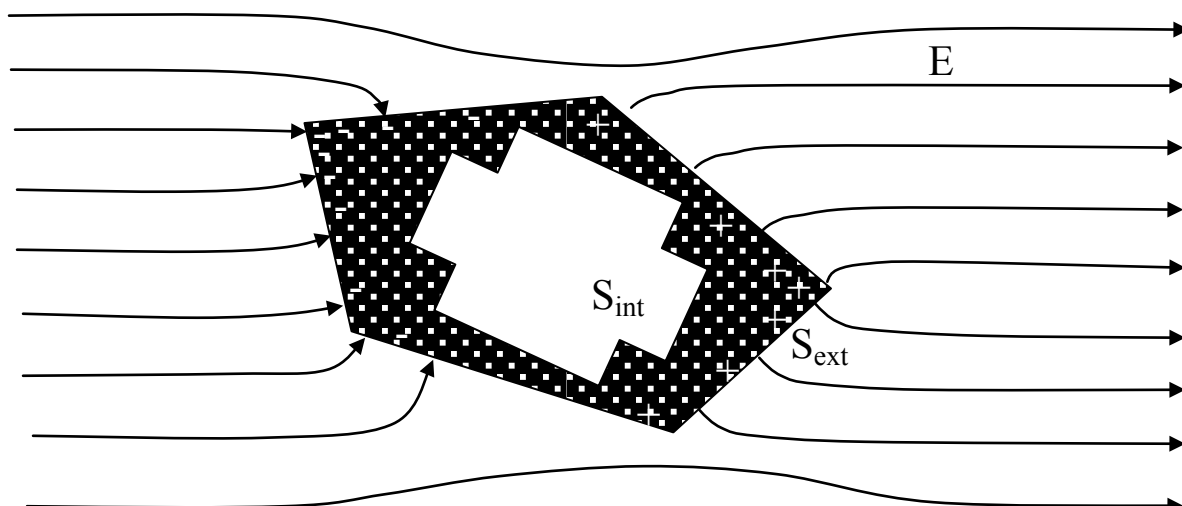
$\implies V = \text{cte}$  a l'interieur  $\implies E = 0$

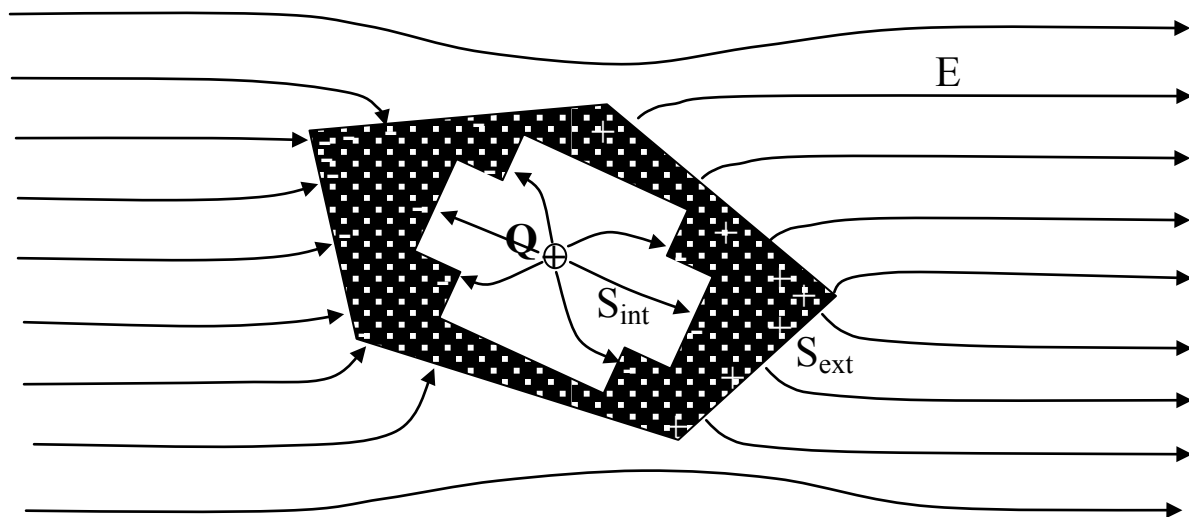
I. Le champ externe ne pénètre pas dans une cavité interne d'un conducteur (on est protégé)

II. Il n'y a pas de charges sur  $S_{\text{int}}$  :  $E_{\text{int}} = 0$ ,  $E_{\text{conducteur}} = 0$ ,

$$\Delta E_N = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \implies \rho_s = 0$$

III. Charge  $Q$  à l'interieur  $\implies$  charge  $-Q$  sur  $S_{\text{int}}$   $\leftarrow$  (th. Gauss)





## Corona décharge

V de sphère :  $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R}$  ,  $R$  plus petit  $\implies V$  plus grand

Mais  $V = \text{cte}$  pour deux conducteurs en contact ; en fait la relation est :

$R$  plus petit  $\implies q$  plus petite.

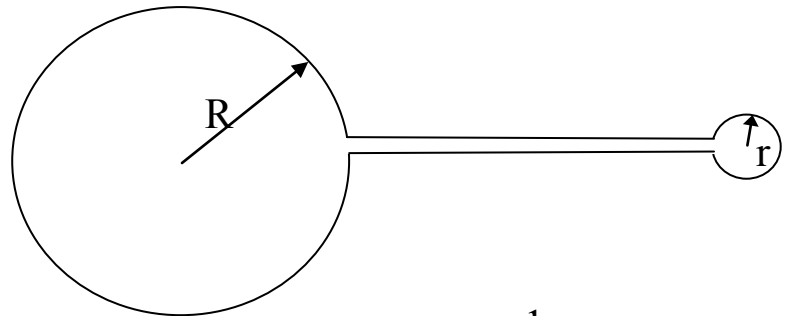
Mais :  $E = -\frac{V}{R}$  , donc  $R$  plus petit  $\implies E$  plus grand pour  $V = \text{cte}$ .

Au voisinage d'une partie pointue d'objet – le champ est plus fort.

Exemple :

$$E_r = E_R \frac{R}{r} = -\frac{V}{r}$$

et  $V$  ne dépend que de  $R$ ,  
si  $r \ll R$



Mathématique :  $S_{\text{cond.}} = S(V) = \text{cte}$  ;  $\nabla^2 V = \frac{\rho_s}{\epsilon_0}$  ;  $\nabla^2 S \propto \frac{1}{R_{\text{courbure}}}$

$$\implies \rho_s \propto \frac{1}{R_{\text{courbure}}}$$

Application : **paratonnerre**

grande sphère – la Terre

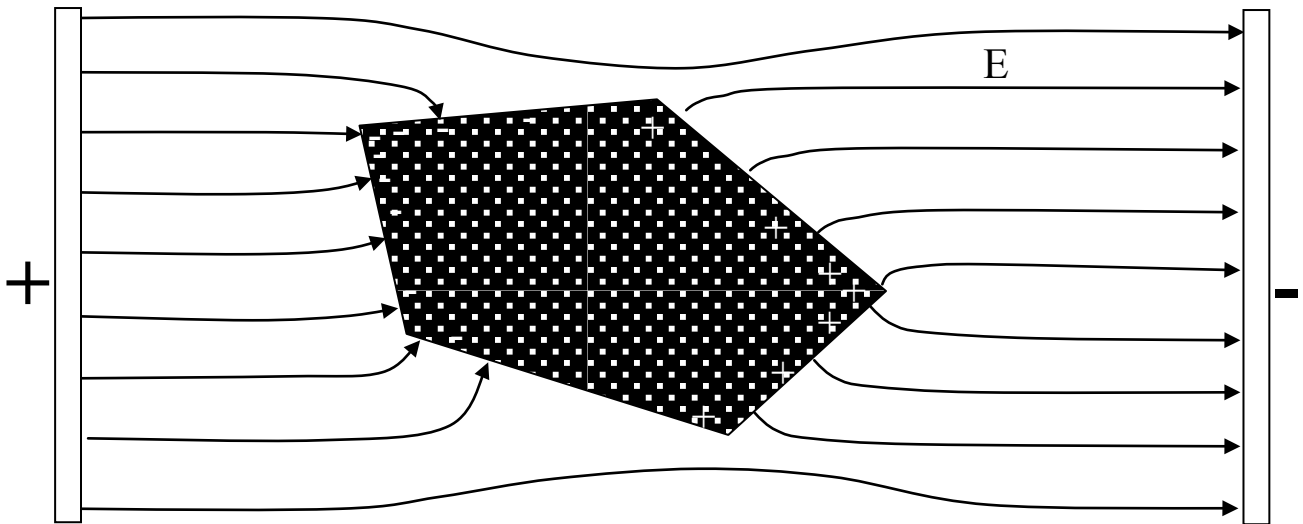
Attn. Le paratonnerre n'est pas fait pour attirer les éclairs mais pour réduire le potentiel localement :

$V$  fort  $\implies$  micro-décharges dans l'air autour

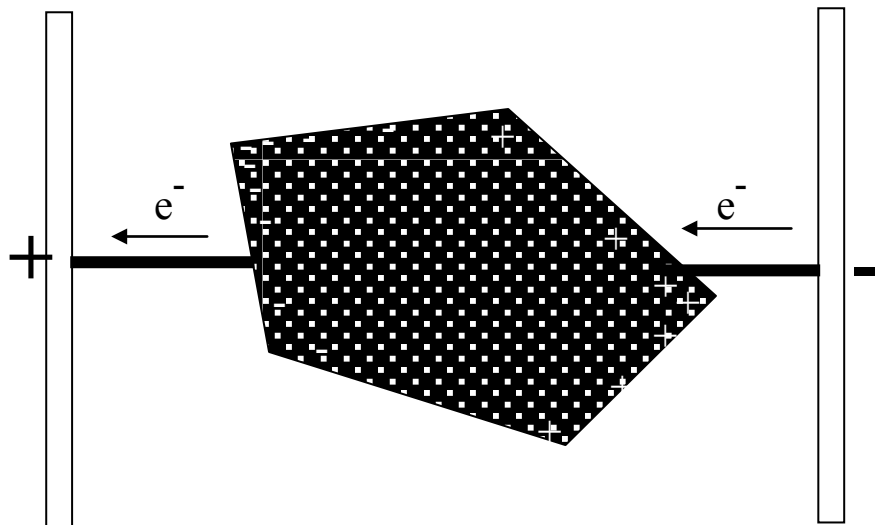
ions+ : libérés, |  
électrons attirés  $\implies$  la différence de potentiel local diminue

## Courant électrique

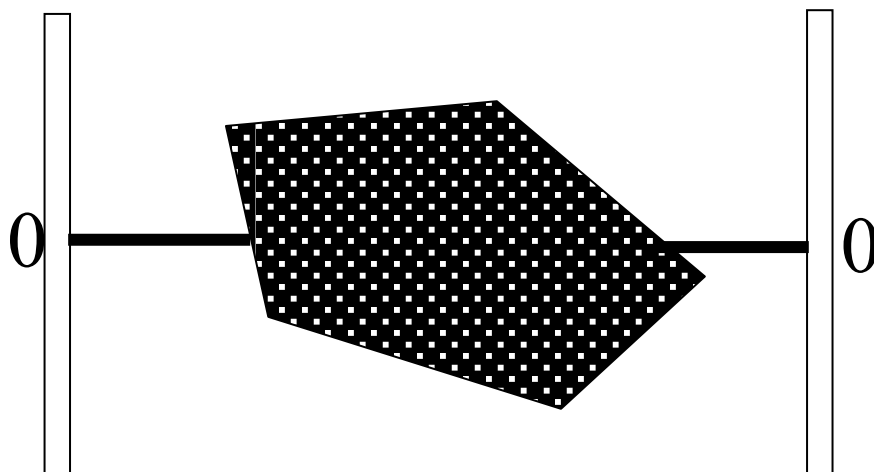
Conducteur dans un champ électrique  $\Rightarrow$  mouvement des charges libres  $\Rightarrow$  équilibre (champ intérieur nul)



Conducteur  
branché :  
courant



Conducteur branché en équilibre : la différence de potentiel est annulée



Pour préserver le courant il faut préserver la différence  $V$  (**source** de  $V$  cte, e.g. prise électrique).

Remarque : avec l'alternance de signe de potentiel ce n'est pas nécessaire de transférer les électrons le long du circuit entier

Si  $V = \text{cte}$ , la force électrique sur chaque électron  $\vec{F} = -eV$  va accélérer l'électron avec accélération constante  $\Rightarrow$  la vitesse  $\vec{v}$  monte sans limite. En fait – ce n'est pas possible – il y a d'autres forces, des collisions, etc.

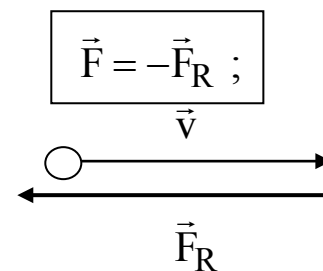
Equilibre dynamique : les forces en équilibre,  $\vec{v} = \text{cte}$ .

Approche phénoménologique :

force **électrique**  $F$  et force de **résistivité**  $F_R$  :

1)  $\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{F}_R = 0$

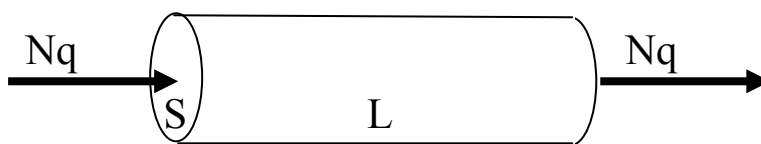
2)  $\vec{F}_R$  et  $\vec{v}$  : antiparallèles



Hypothèse la plus simple :

$$\vec{F}_R = -\tilde{\rho}\vec{v}, \quad \tilde{\rho} \geq 0.$$

**Courant électrique**  $I$  : la quantité de charge passant par seconde en direction  $\vec{L}$  à travers une surface  $S$



$$\vec{I} = NqS_{\perp} \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = NqS_{\perp} \vec{v}, \quad N - \text{nombre de charges } q \text{ par volume}$$

$$[A] \text{ (1 Amper = 1 Coulomb/1 sec)}$$

$$\vec{I} = -NqS_{\perp} \frac{\vec{F}_R}{\tilde{\rho}} = NqS_{\perp} \frac{q\vec{E}}{\tilde{\rho}} = -\frac{Nq^2S_{\perp}}{\tilde{\rho}L} \Delta V,$$

$$E \text{ uniforme : } (E = \frac{-\Delta V}{L})$$

$I$  et  $\Delta V$  antiparallèles, indépendamment du signe de  $q$

$$I = \frac{S_{\perp}}{\rho L} V = \sigma \frac{S_{\perp}}{L} V = \boxed{\frac{1}{R} V}, \quad \text{la loi d'Ohm}$$

$$\rho = \frac{\tilde{\rho}}{Nq^2} \quad - \quad \text{résistivité}, \quad \sigma = \frac{1}{\rho} \quad - \quad \text{conductivité},$$

$$R = \rho \frac{L}{S_{\perp}} \text{ résistance}, \quad \frac{1}{R} - \text{admittance}$$

$$R \propto \frac{L}{S} \quad \begin{array}{l} \text{en séries : résistance = la somme des résistances} \\ \text{en parallèle : l'admittance = la somme des admittances} \end{array}$$

Remarque : Les lois de circuits électriques à partir de lois d'électromagnétisme – pendant les TD

**Densité de courant électrique :**

$$\boxed{\vec{J} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{\vec{I}}{S_{\perp}}} = Nq\vec{v} = Nq \frac{\vec{F}_R}{\tilde{\rho}} = Nq \frac{q\vec{E}}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{\rho} \vec{E}, \text{ ou}$$

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$$

Remarque : le courant  $I$  représente la forme intégrale de densité de courant à travers d'une surface (par exemple, la section d'un fil) :

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{N}_s dS$$

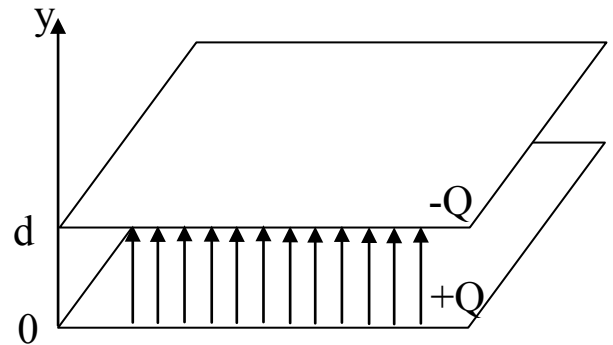
## Condensateurs

2 plans chargés anti-symétriquement (-Q et +Q) créent un champ homogène :

condensateur :

$$\begin{aligned} y > d : \quad E &= 0 & V &= 0 \\ 0 < y < d : \quad E &= \frac{\rho S}{\epsilon_0} & V &= \frac{\rho S}{\epsilon_0} (d - y) \\ y < 0 : \quad E &= 0 & V &= \frac{\rho S}{\epsilon_0} d \end{aligned}$$

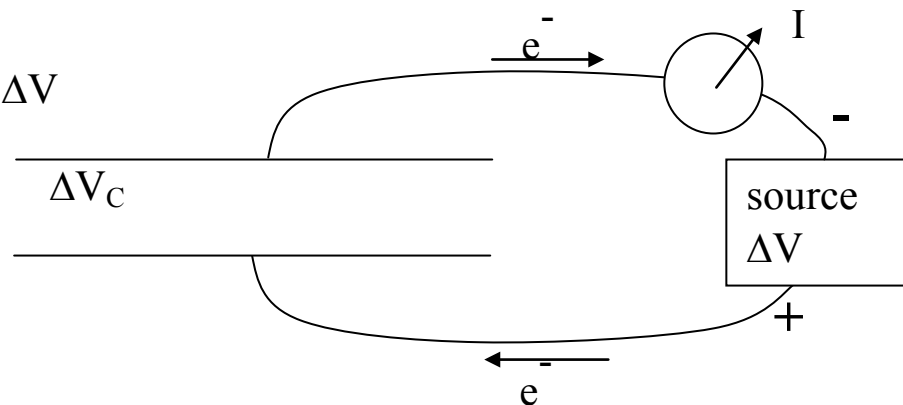
$$\Rightarrow \boxed{\Delta V = \frac{\rho S}{\epsilon_0} d}$$



Questions :

1. Condense quoi ?  $\Rightarrow$  Condense des charges et
2. Pourquoi faire ?  $\Rightarrow$  les préserve (e.g. les mémoires électroniques)
3. Comment ?

$$\Delta V \rightarrow \Delta V_C = \Delta V$$



Si la source est coupée, les charges restent sur les plans, car  $E_{\text{extérieur}} = 0$  ! (en fait, il y a toujours des fuites : l'air n'est pas un isolant parfait, il a des rayons cosmiques dans le vide aussi)



$Q = S\rho_S = \frac{\Delta V \epsilon_0 S}{d}$  pour  $V = \text{cte}$ ,  $Q \nearrow$  si  $S \nearrow$  ou  $d \searrow$ . La capacité  $C$  de stocker des charges est mesurée comme

$$C = \frac{Q}{V} \quad \left[ \frac{C}{V} = \text{F} - \text{Farad} \right] \quad \text{condensateur plan : } C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

Condensateurs en parallèle : comme si on somme la surface  $C = \sum C_j$

Condensateurs en séries : comme si on somme la distance  $\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_j}$

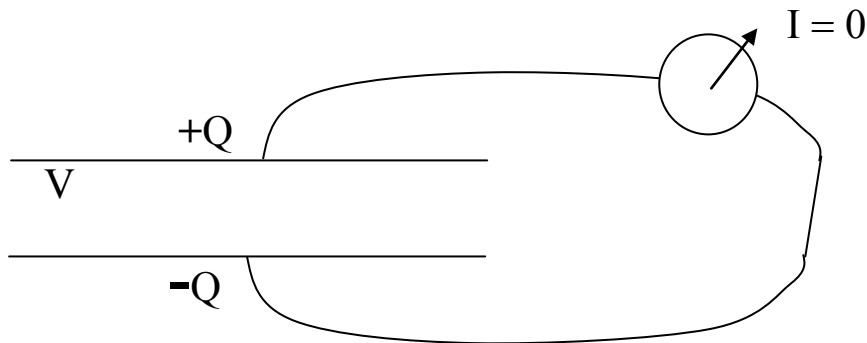
(preuve rigoureuse : TD)

La dernière possibilité pour changer  $C$  :  $\epsilon_0$

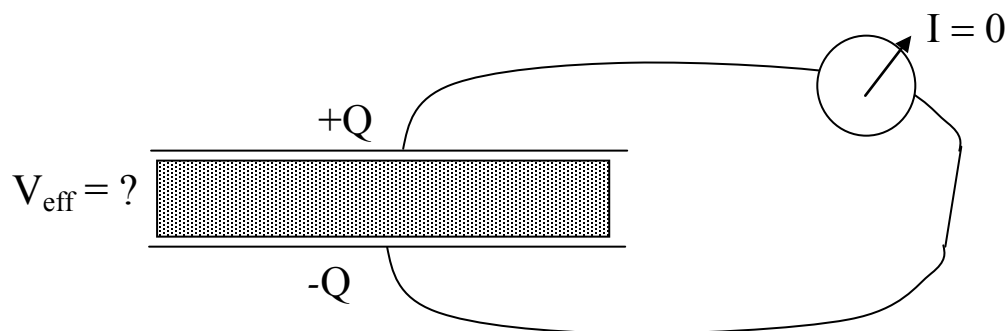
## Diélectriques dans champ électrostatique

Observation **expérimentale** :

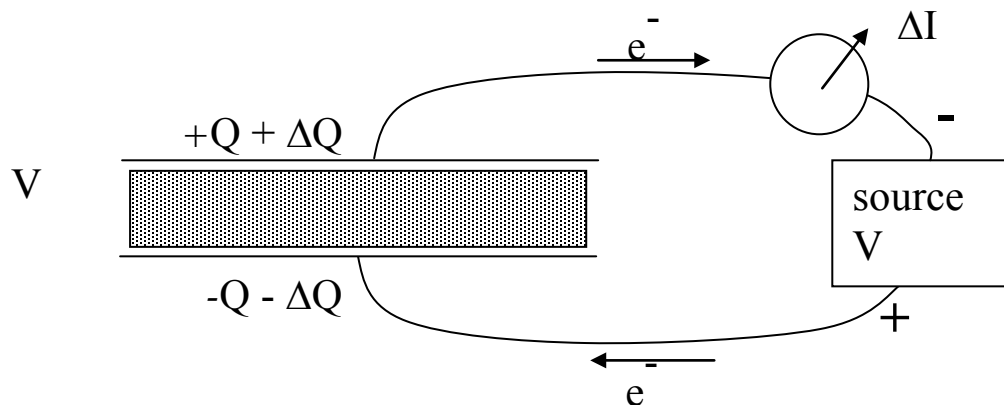
Un diélectrique placé dans un condensateur : le potentiel diminue



Insertion de diélectrique :  $Q$  ne change pas (pas de courant,  $E_{\text{ext.}} = 0$ )



Branchement de la même source :  $\Delta I$  supplémentaire  $\Rightarrow \Delta Q$



$$\Delta V = V - V_{\text{eff}} = \frac{\Delta Q}{\epsilon_0 S} d \implies C_{\text{eff}} = \frac{Q_1}{V_1} > C$$

Comment  $C \left( = \frac{\epsilon_0 S}{d} \right)$  a changé ( $S = \text{cte}$ ,  $d = \text{cte}$ ) ?

Il reste  $\epsilon_0$  !

Def. **constante diélectrique** (permittivité relative) statique (freq. 0)

$$\epsilon_r = \frac{V}{V_{\text{eff}}} \implies C_{\text{eff}} = \epsilon C$$

Comme si

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

l'air  $\epsilon_r = 1.00059$

l'eau  $\epsilon_r = 78.3$

Pourquoi ?

**Rappel :** 1) il n'y a pas des charges libres  
2) peuvent être polarisés

Les atomes et les molécules ont des charges positives et négatives. Un champ externe 'tire' les charges différentes dans les directions opposées, les forces intramoléculaires s'opposent, en l'équilibre nouveau les centres de charges positives et négatives sont déplacés et un dipôle induit est créé, proportionnel au champ externe. La constante de proportionnalité  $\alpha$  s'appelle **polarisabilité** de milieu.

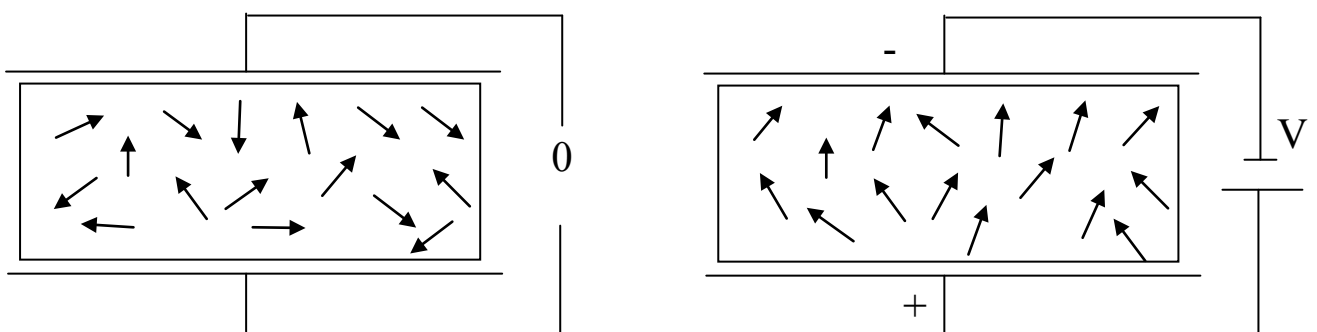
Si  $\vec{p}_0 \neq 0$  (l'eau) : deux cas en absence de champ externe

- **désordre** chaotique (liquides, milieux amorphes, polycristaux)  $\vec{p}_{0,\text{total}} = 0$
- **ordre** partiel : segnetoélectriques – cristaux ayant un dipôle naturel

Dans champ externe : deux cas

- les dipôles permanents ne bougent pas :  $\vec{p}_{0,\text{total}} = \text{cte}$
- les dipôles sont alignés partiellement parallèlement au

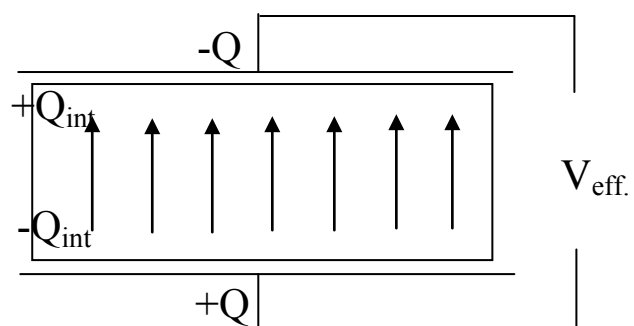
$$\vec{E}_{\text{externe}} \Rightarrow \vec{p}_{\text{moyen}} = \vec{p}_0 + \alpha \vec{E}_{\text{externe}}$$



Dans le volume : les charges négatives et positives se compensent

Sur la surface : excédent des charges  $Q_{\text{interne}} \propto |\vec{p}_{\text{moyen}}| = \alpha E_{\text{externe}}$

Equivalent macroscopique :



le moment dipolaire induit  $\parallel \vec{E} \Rightarrow Q_{\text{int}}$  a le signe opposé à  $Q$

$$Q_{\text{effective}} = Q - Q_{\text{int.}} \Rightarrow V_{\text{effectif}} = \frac{Q_{\text{effective}} d}{\epsilon_0 S} < V$$

la capacité avec diélectrique :  $C_{\text{diél.}} = \frac{Q}{V_{\text{eff.}}} > C$

### Relation entre $\alpha$ et $\epsilon_r$ :

Pour préserver  $V = \text{cte}$ , la source ajoute  $Q_{\text{int.}}$  à  $Q$

$$\Rightarrow C_{\text{diél.}} = \frac{Q + Q_{\text{int.}}}{V} = \frac{Q + Q_{\text{int.}}}{Q/C} = \left(1 + \frac{Q_{\text{int.}}}{Q}\right) C \equiv \epsilon_r C$$

$$p_{\text{diél.}} = Q_{\text{int.}} d \quad \text{et} \quad p_{\text{diél.}} = N \alpha E, \quad N - \text{nombre total de dipôles}$$

$$Q_{\text{int.}} = \frac{N}{d} \alpha E \Rightarrow \epsilon_r = 1 + \frac{Q_{\text{int.}}}{Q} = 1 + \frac{\frac{N}{d} \alpha E}{\epsilon_0 S E} = 1 + \frac{N \alpha}{S d \epsilon_0}$$

$$\epsilon_r = 1 + \frac{N_0 \alpha}{\epsilon_0}, \quad \left| \begin{array}{l} N_0 = \frac{N}{S d} - \text{densité volumique de dipôles} \geq 0 \\ \alpha > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \epsilon_r \geq 1$$

$$N_0 \alpha = \chi_e - \text{susceptibilité électrique},$$

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E} - \text{vecteur de polarisation}$$

**Conception** : si la loi de Coulomb est mesurée dans un milieu avec

$$\epsilon_r \neq 1 \Rightarrow F \rightarrow \frac{1}{\epsilon_r} F \Leftrightarrow \epsilon_0 \rightarrow \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$$

**Champ supplémentaire** :  $\Delta E = E_{\text{eff}} - E = \left( \frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right) E = \frac{1 - \epsilon_r}{\epsilon_r} E$

$\Delta E$  est linéairement proportionnel au  $E$  et a le signe opposé

## Force magnétique

Aimants naturels, magnétisation par induction, démagnétisation par choc ou température, etc.

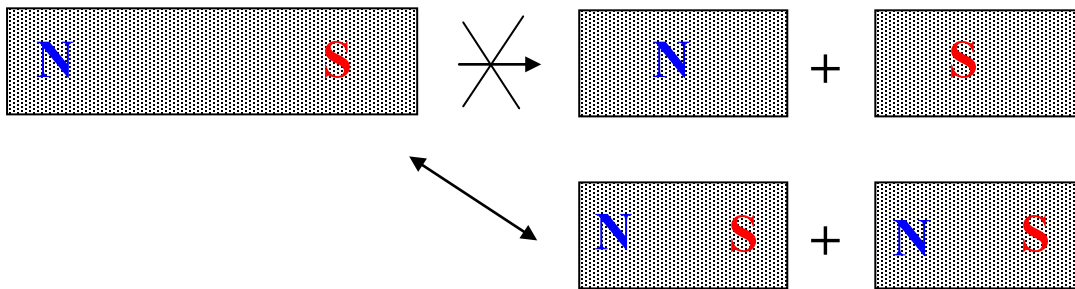
### Propriétés :

**similarités** avec la force électrique

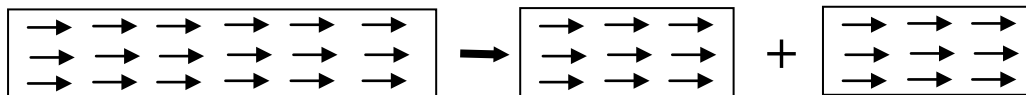
1. Il y a 2 types de pôles
2. Les pôles opposés s'attirent, les pôles similaires se repoussent

### différence

3. Ils n'existent qu'en paires



Comme des dipôles électrostatiques :



différence :

en divisant progressivement le dipôle électrostatique, on arrive à séparer les charge électriques ; pour les aimants – personne n'est encore arrivé à séparer les pôles magnétiques.

**Hypothèse :** le dipôle magnétique est l'élément fondamental magnétique (d'Ampère)

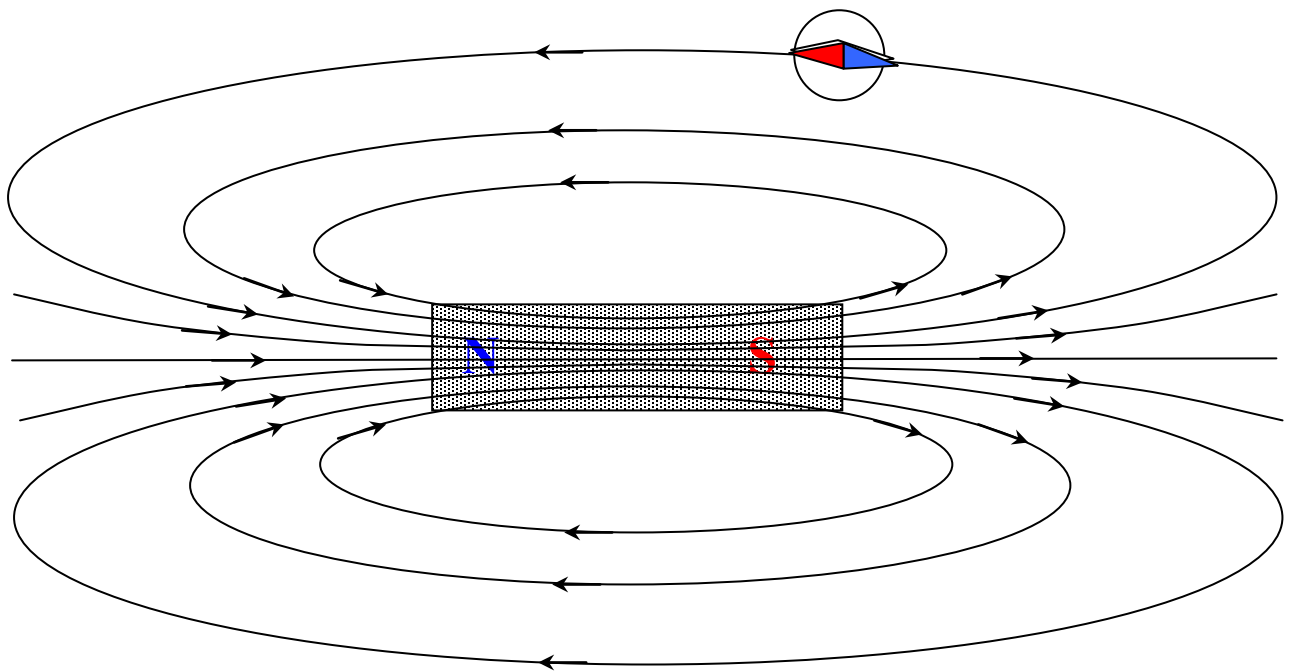
+ propriétés : la force s'exerce à distance, sans contact direct ;

la conception de champ magnétique qui est le porteur de la force (à vérifier qu'on peut bien définir les caractéristiques de champ qui ne dépendent pas de 'détecteur' mais seulement de la source)

**champ magnétique** : vecteur  $\mathbf{B} // \mathbf{F}_{\text{magn.}}$  et normalisé correctement  
(pour être indépendant de détecteurs)

comment **mesurer** : avec détecteurs qui ne modifient pas le champ,  
e.g., petits aimants 'passifs'

**présentation** : avec la carte de lignes tangentiels à la force  
(attn. pas de charges séparées : pas de début et fin de lignes)

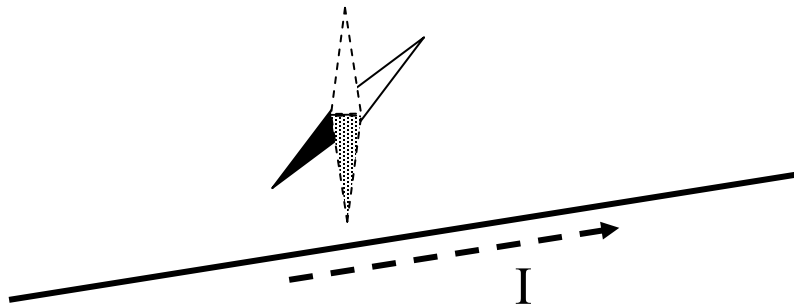


On peut continuer l'étude du champ magnétique séparément du champ électrique, mais les liens sont si importants, qu'il est préférable de les étudier **ensemble**.

1600 William Gilbert : « De Magnète »

## 220 ans - rien

1819 H. Oerstead (danois) trouva par hasard (pendant le cours) que le courant électrique dévie l'aiguille aimantée d'une boussole :

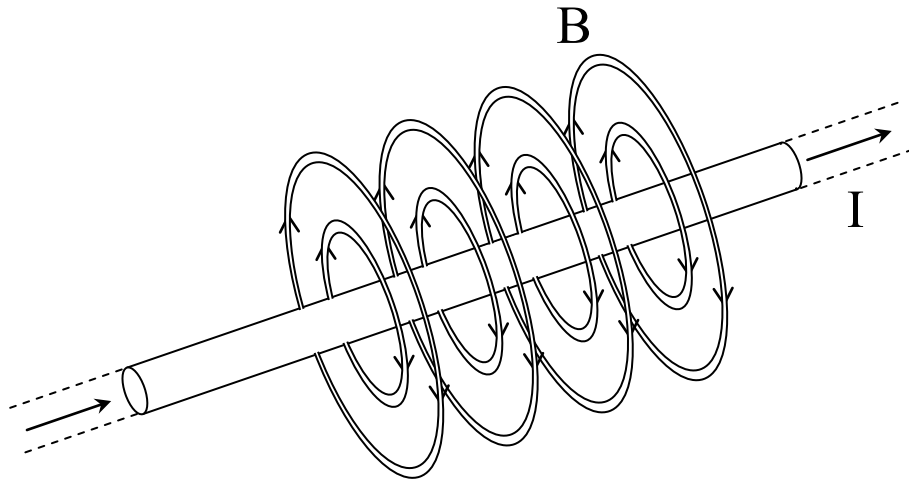


Faits expérimentaux :

1. Le courant électrique crée une force sur l'aimant. Sans courant – aucune force
2. Charges sans mouvements : pas de champ magnétique ; champ magnétique n'exerce pas de force sur les charges au repos
3. La force est perpendiculaire à la direction du courant
4. La force est proportionnelle à la magnitude de courant et à la puissance de l'aimant
5. Le principe de l'action et de la réaction nécessite que l'aimant exerce la même force (direction opposée) sur les charges de courant et le courant diminue (travail fait pour tourner l'aiguille diminue la vitesse des charges)



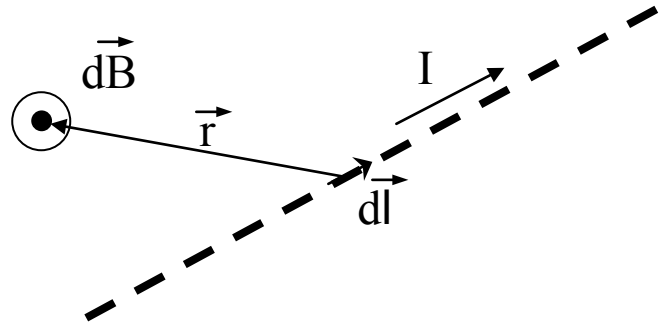
**Conclusion** : le courant électrique crée un champ magnétique et le champ magnétique exerce une force sur les charges en mouvement



1820 : Jean Baptiste Biot et Félix Savart – mesure quantitative

**Loi de Biot et Savart** (champ magnétique crée par un segment de courant) :

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{\ell} \wedge \frac{\hat{\vec{r}}}{r^2}}$$



(correspond à la loi de Coulomb)

1.  $B \perp d\vec{\ell}, r$  (la triade  $d\vec{\ell}, r, B$  est directe – règle du bonhomme d'Ampère ou règle du tire-bouchon de Maxwell)
2.  $B \sim I$
3.  $B \sim 1/r^2$
4.  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  : perméabilité magnétique du vide

$B$  [T – Tesla] :  $1\text{T} = 1\text{N}/(1\text{A } 1\text{m})$  ; pourquoi – plus tard !  
 $1\text{G (Gauss)} = 10^{-4} \text{ T}$

Pourquoi  $B \not\propto F$  (peut-on définir  $B$  comme  $F/\text{qqch}$  ?)

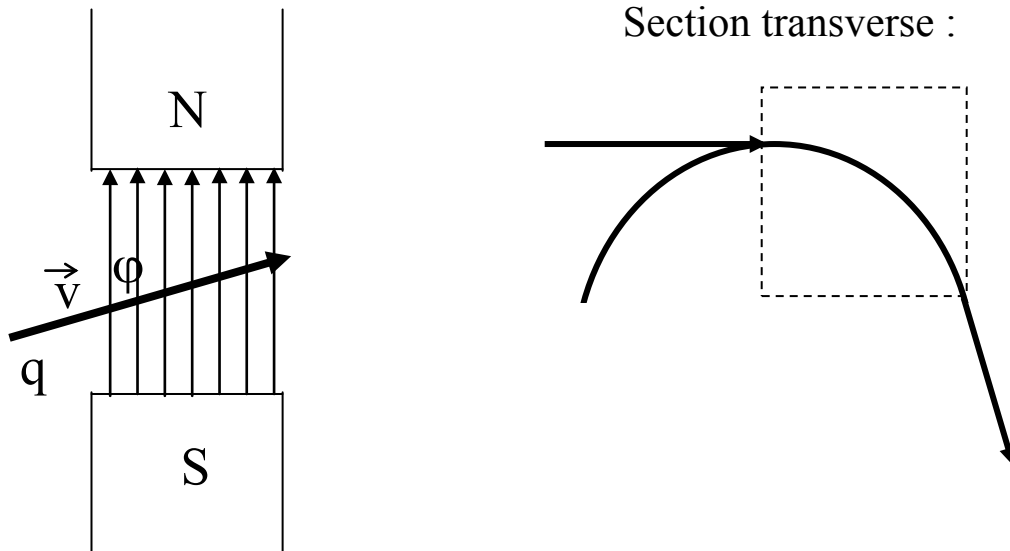
(en fait,  $B \not\propto F$  entre les aimants et les aimants sont équivalents aux dipôles magnétiques)

Il faut définir la force magnétique exercée sur des charges en mouvement (elle existe dû au principe de l'action et de la réaction)

## Force sur une charge en mouvement dans un champ magnétique

**Expérience** par la pensée :

Mouvement de charges dans  $B$  homogène (créé par deux grands aimants) :

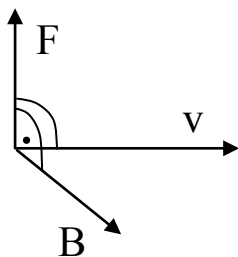


Observations :

1. Dans la région du champ la trajectoire tourne en cercle ayant une courbure constante dans le plan transverse de  $B$ .
2. La vitesse reste inchangée en module.
3. La courbure est proportionnelle à  $q$ ,  $B$ ,  $v$  et  $\sin\phi$  (si  $v \parallel B$  : pas d'influence)
4.  $S \longleftrightarrow N$  : la courbure change de signe

Conclusions :

La charge est soumise à une force  $F \perp v$  et  $B$ ,  $F = 0$  si  $v \parallel B$ ,  
 $F \sim v, B, q$  :



$$\vec{F}_{\text{mag.}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

prenons ça comme def. du champ magnétique ; donne des unités :

$$[B] = [F]/([q][v]) = \text{N}/(\text{Cms}^{-1}) = \text{NA}^{-1}\text{m}^{-1}$$

## La force de Lorentz

(champ magnétique et champ électrique)

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{elec.}} + \vec{F}_{\text{mag.}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Répetons la question : Peut-on définir B comme  $\vec{B} = \frac{\vec{F}_{\text{mag.}}}{qqch.}$  ?

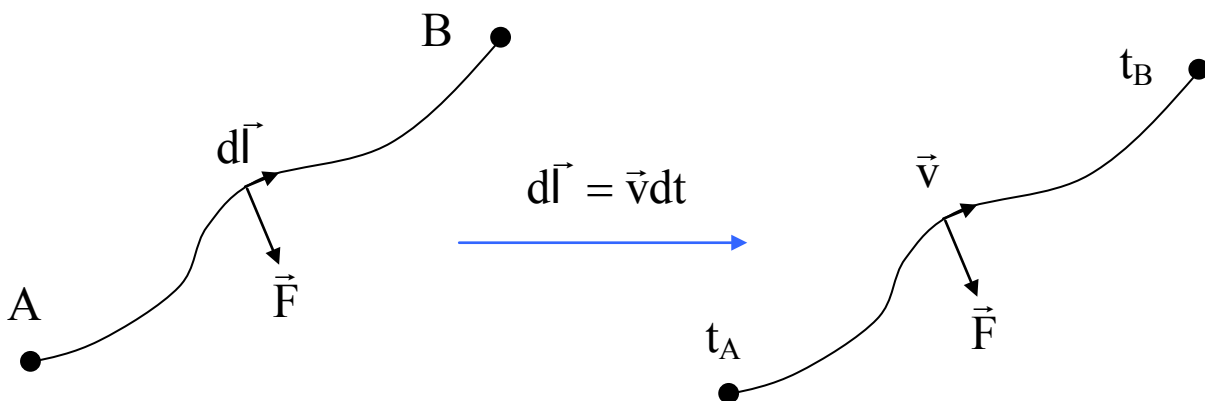
La conception de champ nécessite que le champ soit déterminé indépendamment de l'objet d'essai, donc de  $v$ .

$$\begin{array}{l} 1. \vec{F} \perp \vec{v} \\ 2. F \sim v \\ 3. \vec{F} \propto \vec{v} \langle \text{operation} \rangle \vec{B} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \langle \text{operation} \rangle = \text{produit vectoriel}$$

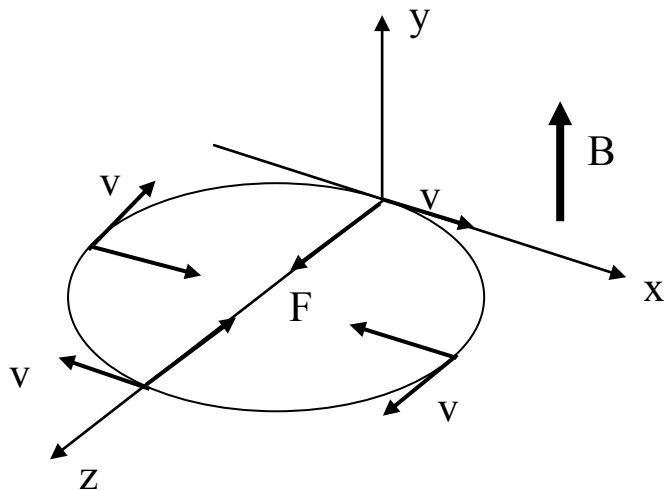
Attn.  $\vec{F}_{\text{mag.}}$  ne fait pas de travail sur les charges libres :

$$W_{BA} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{t(A)}^{t(B)} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\ell}}{dt} dt = \int_{t(A)}^{t(B)} \vec{F} \cdot \vec{v} dt \equiv 0 \quad \text{car } \vec{F}_{\text{mag.}} \perp \vec{v}$$

Notre expérience a montré que  $v = cte \implies W \text{ cinétique} = cte$ .



## Mouvement cyclotron



$E = 0$ ,  $B$  uniforme,

I.  $v \perp B$

trajectoire: cercle

$$F_{\text{mag.}} = qvB = \frac{mv^2}{R}$$

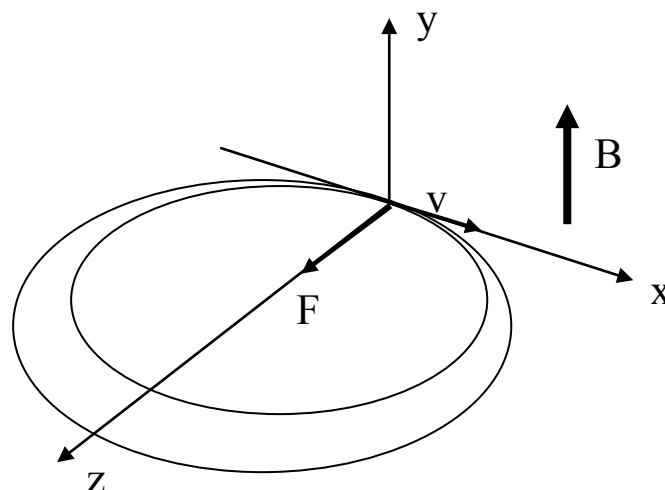
$$R = \frac{mv}{qB} \quad \text{rayon cyclotron ;}$$

fréquence:  $f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{qB}{2\pi m}$  (ne dépend pas de  $R$  !)

1. Sers à mesurer le rapport  $q/m$

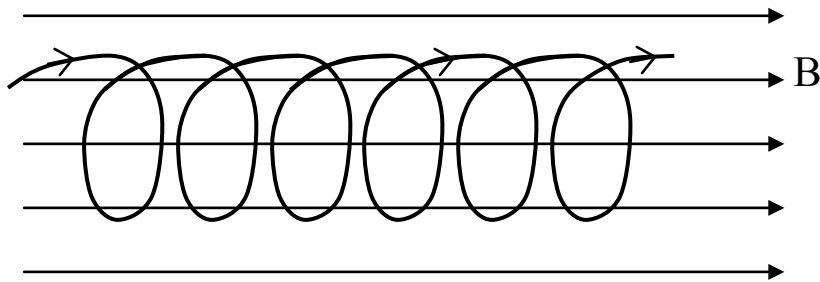
2. La même charge et masse différente (e.g. isotopes ionisés)  
 $R$  et  $f$  différent

- $R$  différent : les isotopes différent peuvent être capturés dans les régions différentes (séparation d'isotopes)
- $f$  peut être mesurée par effets résonants : détermination du contenu isotopique



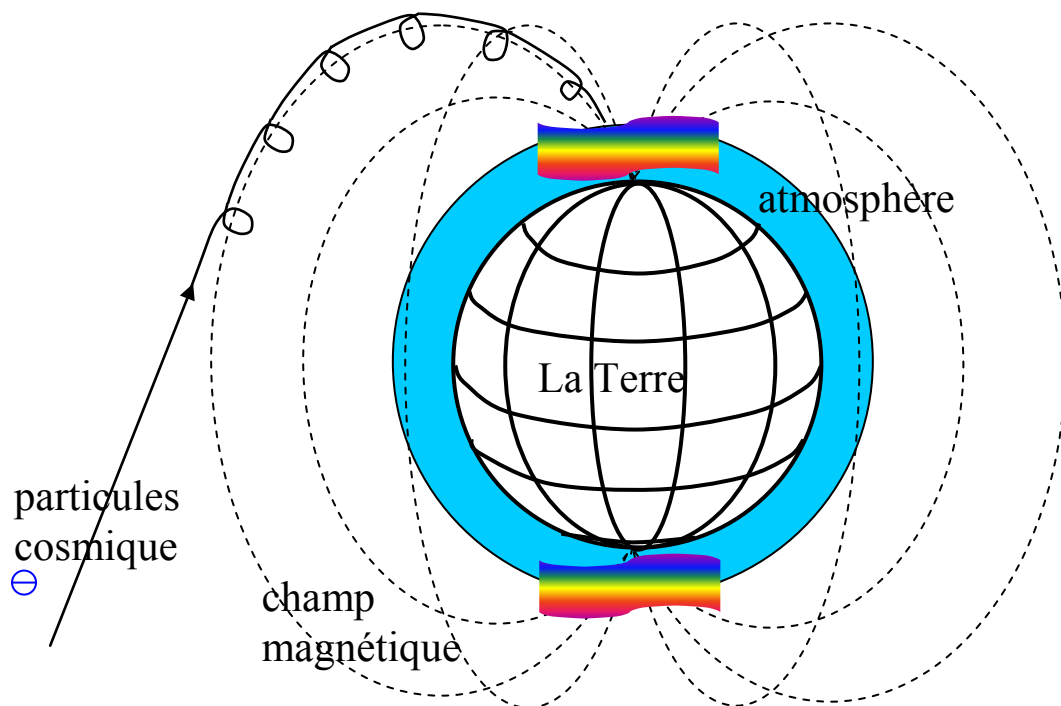
$$\text{II. } \vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$$

$\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow v_{\parallel} = \text{cte}$  ; dans plan transverse : mouvement circulaire



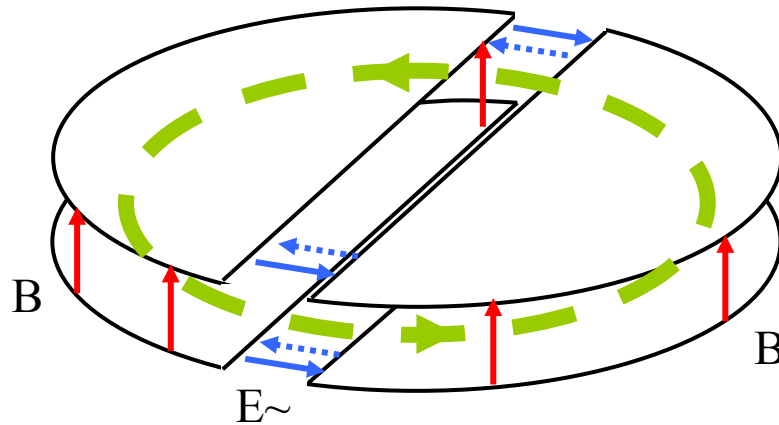
Exemples:

### 1. Aurore boréale



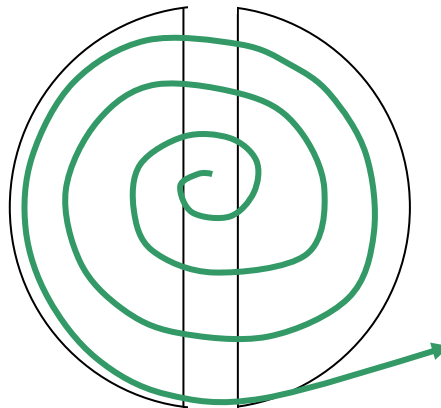
Les particules cosmiques sont capturées par le champ magnétique et se ‘glissent’ en parallèle de  $B$  jusqu’aux pôles. En entrant dans l’atmosphère, elles ionisent l’air  $\Rightarrow$  aurore boréale

### 3. Cyclotrons :



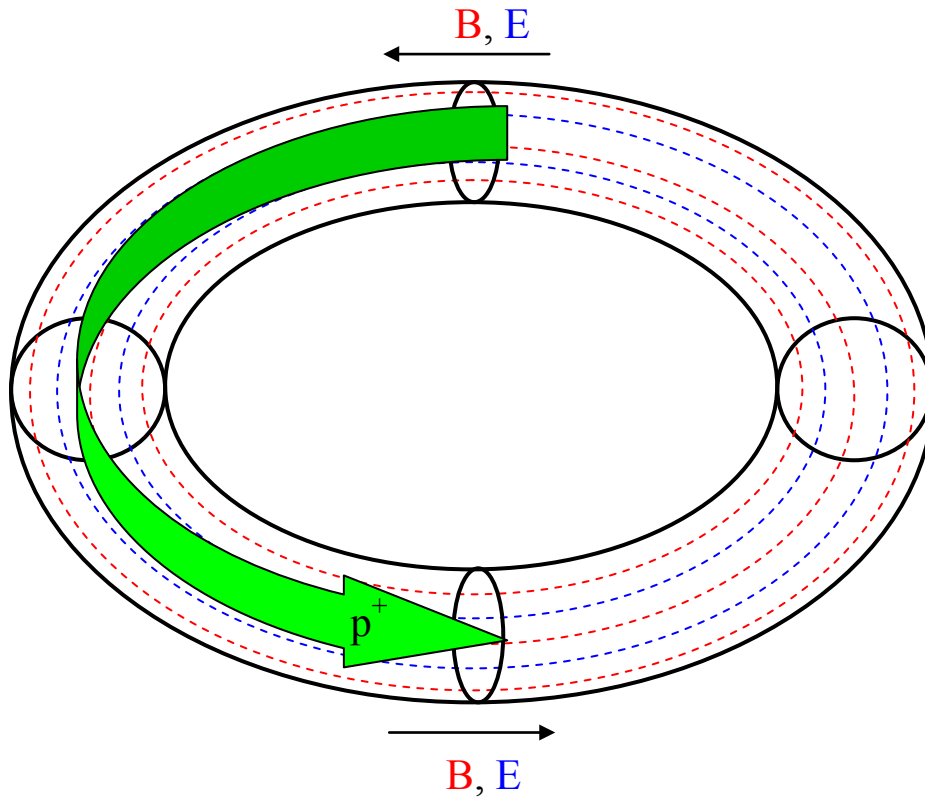
Deux cages semicylindriques métalliques avec potentiel électrique alterné pour accélérer les particules chargées quand ils passent les bouches.

Le champ magnétique homogène pour faire tourner la trajectoire en une spire :



Avec l'accélération la masse augmente (l'effet de la relativité) - nécessite le changement de la fréquence du E ou de la magnitude de B (ou les deux) - synchrophasotrones

L'autre possibilité – les champ magnétique et électrique en parallèle du faisceau (B est plus fort en approchant les murs de la chambre) :



E accélère les protons en augmentant  $v_{\parallel}$  .  $v_{\perp}$  est modifié par B de façon que les particules restent toujours à l'intérieur.



### Loi de Laplace

(force d'un champ magnétique externe sur un élément de courant)

B externe exerce une force F (donnée par l'expression de Lorentz) sur chaque charge q d'un élément de courant  $I d\vec{\ell}$  :

$$d\vec{F}_q = q \vec{v} \times \vec{B} ;$$

$$\Rightarrow d\vec{F} = dQ \vec{v} \times \vec{B} \quad (dQ \text{ charge totale mobile dans } d\vec{\ell})$$

$$\text{mais } I d\vec{\ell} = \frac{dQ}{dt} d\vec{\ell} = dQ \vec{v} \quad \Rightarrow \boxed{d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}}$$

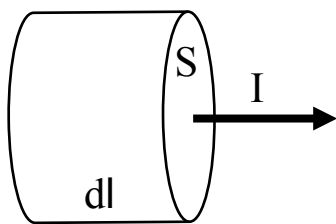
$$\text{fil droit, champ uniforme : } \Rightarrow \vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

Conséquences :

1. Chaque segment L d'un fil est 'tiré' par une force  $F \perp (B \text{ et } L)$  ;
2.  $F \sim B, I, L, \sin\langle L, B \rangle$

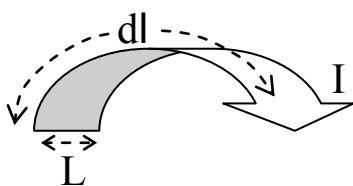
Densité de courant et loi de Laplace :

$$\text{Charges volumiques : } dQ = \rho dV ; \quad \vec{J} \equiv \frac{\vec{I}}{S} = \frac{I d\vec{\ell}}{S d\ell} = \frac{I d\vec{\ell}}{dV}$$



$$\Rightarrow d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} dV$$

$$\text{Charges surfaciques : } dQ = \rho_s dS ; \quad \vec{J}_s \equiv \frac{\vec{I}}{L} = \frac{I d\vec{\ell}}{L d\ell} = \frac{I d\vec{\ell}}{dS}$$



$$\Rightarrow d\vec{F} = \vec{J}_s \times \vec{B} dS$$

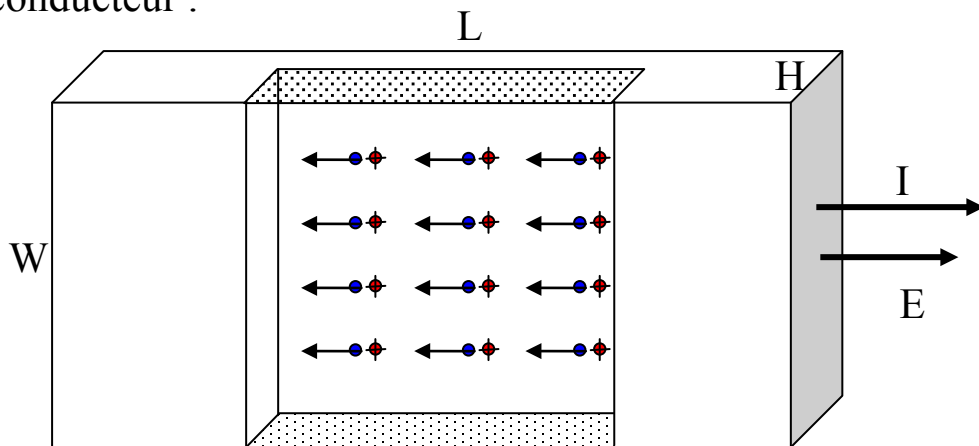
## Effet Hall

On a étudié :

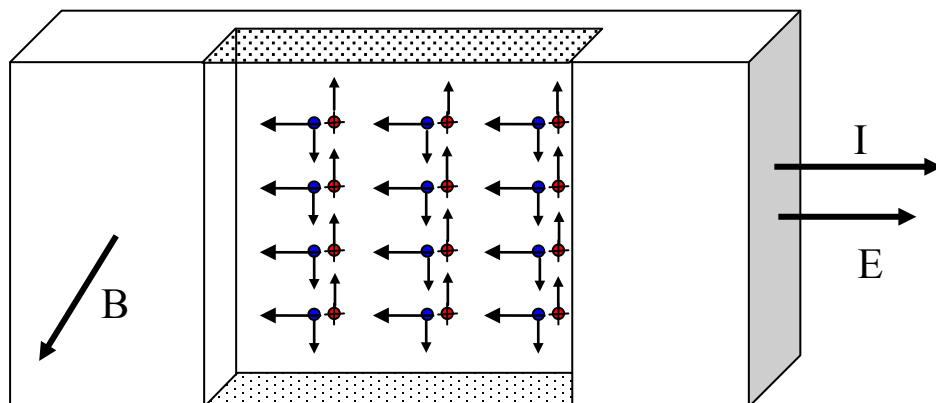
1. Charges libres dans champ externe uniforme
2. Élément du courant dans champ externe uniforme

Maintenant : charges libres formant le courant (e.g. métaux, plasma)

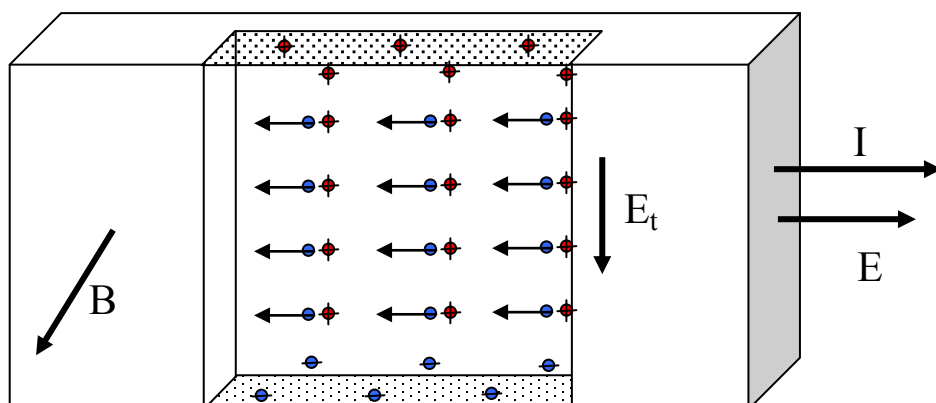
e.g. conducteur :



dans champ magnétique : force transverse ( $\vec{F}_t = q\vec{v} \times \vec{B}$ )



Déplacement de charges négatives vers le ‘bas’, l’excès de charges négatives en ‘bas’ et de charges positives en ‘haut’ crée un potentiel transversale et un champ  $\vec{E}_t$



En équilibre  $\vec{E}_t = \vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow E_t = v B$

$$J = N_0 q v \quad (\text{densité de courant})$$

$$\Rightarrow E_t = \frac{1}{N_0 q} J B$$

$$E_t = \frac{U_t}{W} ; J = \frac{I}{S} = \frac{I}{WH}, \quad \Rightarrow U_t = \frac{1}{N_0 q H} I B$$

$$K = \frac{1}{N_0 q} - \text{coefficient de Hall, spécifique pour chaque matériau}$$

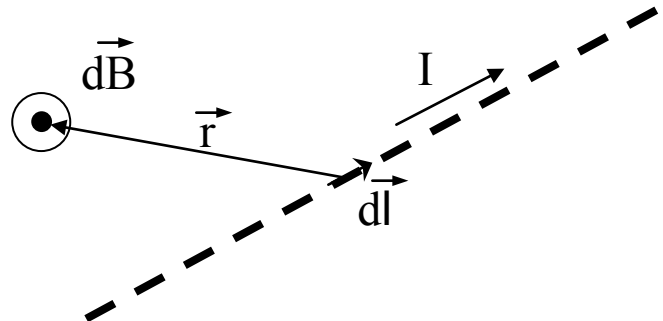
le signe de K donne le signe de porteurs de courant.

Dans beaucoup de métaux  $N_0 \sim$  nombre d'atomes, donc presque chaque atome donne un électron libre.

## Champ créé par une charge en mouvement

**Rappel :** Loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$



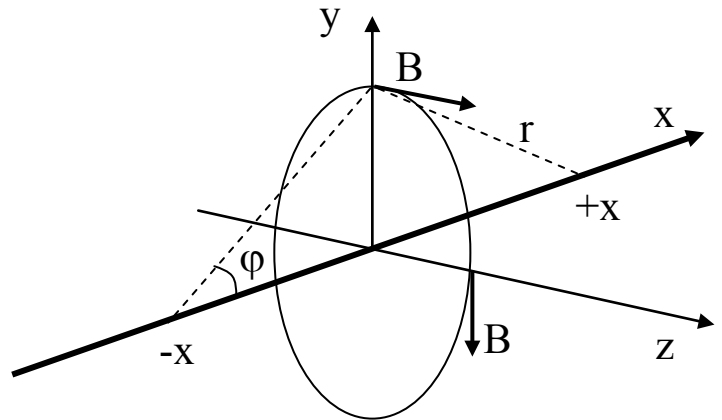
mais, par définition :

$$I d\vec{\ell} = \frac{dQ}{dt} d\vec{\ell} = dQ \vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \vec{v} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}}$$

## Champ créé par une ligne de courant

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\vec{B} = \int d\vec{B}$$



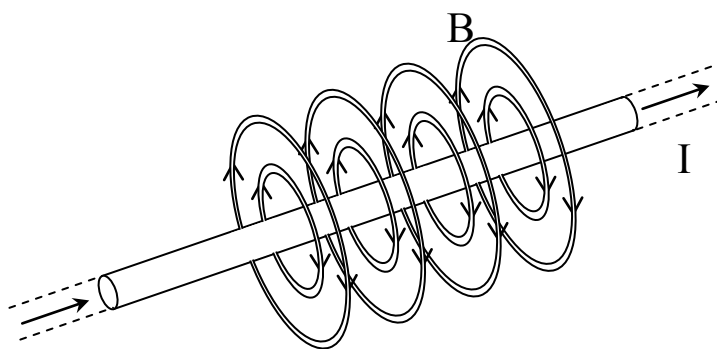
$$1) \vec{B} \perp d\vec{\ell} \Rightarrow dx \Rightarrow B_x = 0$$

$$2) dB_y(-x) = -dB_y(x) \Rightarrow B_y = 0$$

$$B_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\sin \varphi(x)}{r^3(x)} dx = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \varphi}{(y_0 / \sin \varphi)^3} \frac{y_0 d\varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi y_0} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi y_0}$$

$$\left( r = \frac{y_0}{\sin \varphi}; \quad x = -\frac{y_0}{\tan \varphi} \Rightarrow dx = \frac{y_0}{\sin^2 \varphi} d\varphi \right)$$

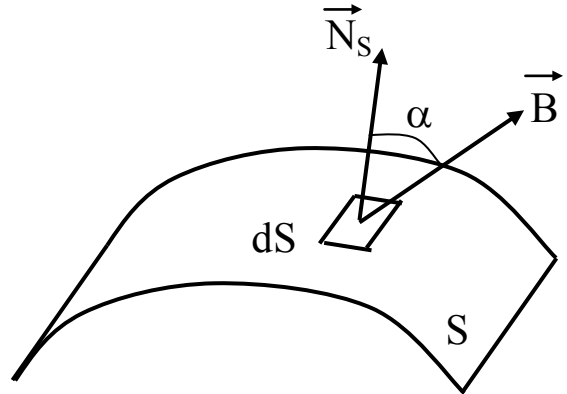


Question : pour les calculs de E le théorème de Gauss était très utile.  
Est-ce que il n'existe pas qqch. pour B ?

### Flux de champ magnétique

def.  $d\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{N}_S dS = B dS \cos \alpha$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \vec{N}_S dS$$

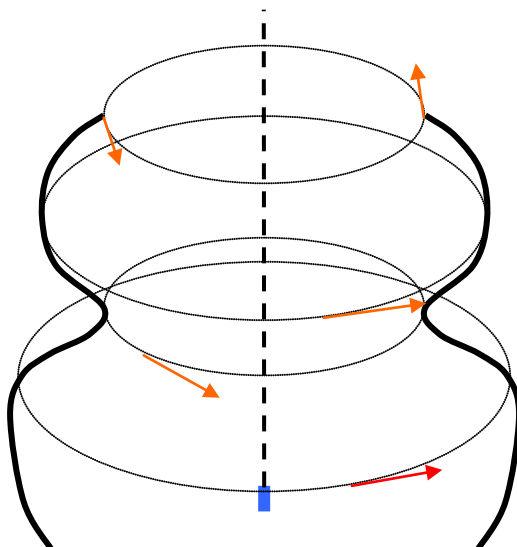


L'analogue du théorème de Gauss existe :

$$\Phi_B \equiv \oint_S \vec{B} \cdot \vec{N}_S dS = 0$$

B a la même dépendance de r comme E, mais la direction de B est différente.

Exemple : un élément de courant et une surface de rotation



B tangential à S partout

$$\vec{B} \cdot \vec{N}_S \equiv 0$$



$$\Phi_B = 0$$

## Preuve générale : **théorème d'Ostrogradski Gauss**

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{F} dV \quad \text{- théorème d'Ostrogradski-Gauss}$$

Application : Flux de champ magnétique

Champ créé en  $r$  par une charge placée en origine se déplacent à une

vitesse  $v$  :  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \vec{v} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$

$$\text{div} \vec{B} = \frac{Q\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{v} \wedge \vec{r} \frac{1}{r^3} \right) = -\frac{Q\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{r} \frac{1}{r^3} \wedge \vec{v} \right)$$

$$= -\frac{Q\mu_0}{4\pi} \left( \vec{\nabla} \wedge \vec{r} \frac{1}{r^3} \right) \cdot \vec{v} ; v \text{ ne dépend pas du point d'observation ;}$$

en plus,  $\text{rot} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{B} = 0$

$$\Phi_B \equiv \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{B} dV = 0 \quad \text{représentation intégrale du}$$

théorème de Gauss pour le champ magnétique

### Théorème du flux – présentation différentielle

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

représentation intégrale du théorème de  
Gauss pour le champ magnétique

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

représentation différentielle

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

représentation intégrale du théorème de  
Gauss pour le champ électrique

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\int_V \rho dV}{\epsilon_0} \quad \text{pour chaque } V$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

représentation différentielle

L'importance : les représentations différentielles sont la moitié des équations de Maxwell.



## Dipôle magnétique

Qu'est-ce qu'il s'est passé avec des aimants ?

**Hypothèse d'Ampère** : le magnétisme dans la matière est dû au moyen d'une multitude de petits anneaux de courants électriques distribués à l'intérieur de la substance. Pour l'instant on n'a pas trouvé de monopoles magnétiques.

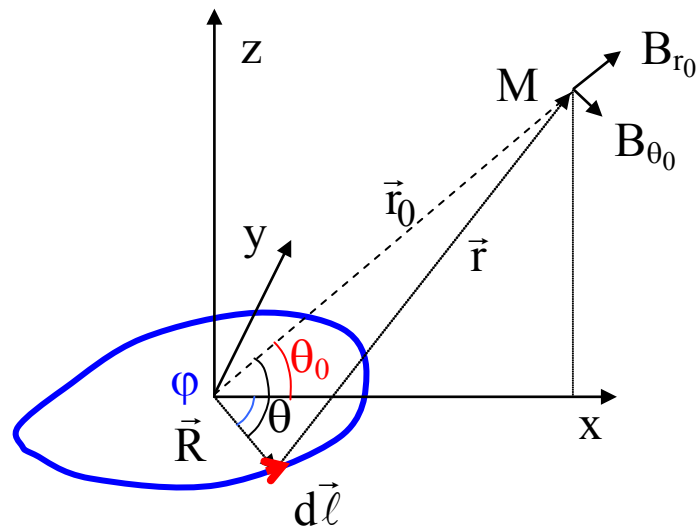
Champ magnétique d'une spire de courant à grande distance :

$$M \in (x, z)$$

$$L \in (x, y)$$

$$r \gg R,$$

$$\cos \theta = \cos \theta_0 \cos \varphi$$



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} d\vec{\ell} \wedge \vec{r} \quad (\text{loi de Biot-Savart})$$

$$r = \sqrt{r_0^2 + R^2 - 2Rr_0 \cos \theta},$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 - \vec{R} = \vec{r}_0 - \vec{R}_0 R, \quad \left( \vec{R}_0 = \frac{\vec{R}}{R} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{-\vec{R}_0 r^3 - \vec{r} \frac{3}{2} r (2R - 2r_0 \cos \theta)}{r^6} \Big|_{R=0} = -\frac{\vec{R}_0}{r_0^3} + 3 \frac{\vec{r}_0}{r_0^4} \cos \theta$$

$$\frac{\vec{r}}{r^3} \approx \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} + R \left( -\frac{\vec{R}_0}{r_0^3} + 3 \frac{\vec{r}_0}{r_0^4} \cos \theta \right) = \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} + 3 \frac{\vec{r}_0}{r_0^4} R \cos \theta - \frac{\vec{R}}{r_0^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[ \left( \oint_L d\vec{\ell} \right) \wedge \frac{\vec{r}_0}{r_0^3} + 3 \left( \oint_L d\vec{\ell} R \cos \theta \right) \wedge \frac{\vec{r}_0}{r_0^4} - \frac{1}{r_0^3} \oint_L d\vec{\ell} \wedge \vec{R} \right]$$

0
-2\vec{S}

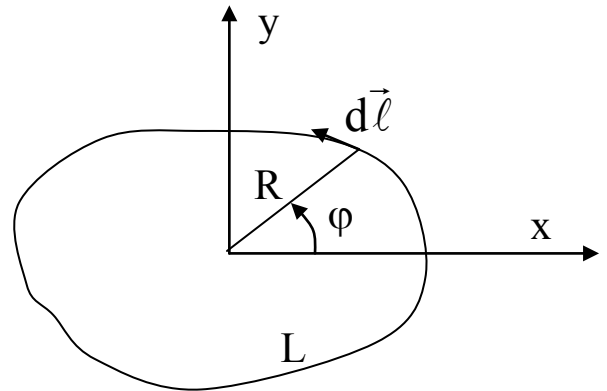
$$\oint_L d\vec{\ell} R \cos \theta = \cos \theta_0 \oint_L d\vec{\ell} R \cos \varphi$$

$$R \cos \varphi = x_L$$

$$d\vec{\ell}_x = dx_L$$

$$d\vec{\ell}_y = dy_L$$

$$d\vec{\ell}_z = 0$$



$$\cos \theta_0 \left( \oint_L d\vec{\ell} R \cos \varphi \right)_x = -\cos \theta_0 \oint_L x_L dx = 0$$

$$\cos \theta_0 \left( \oint_L d\vec{\ell} R \cos \varphi \right)_y = \cos \theta_0 \oint_L x_L dy = \cos \theta_0 S$$

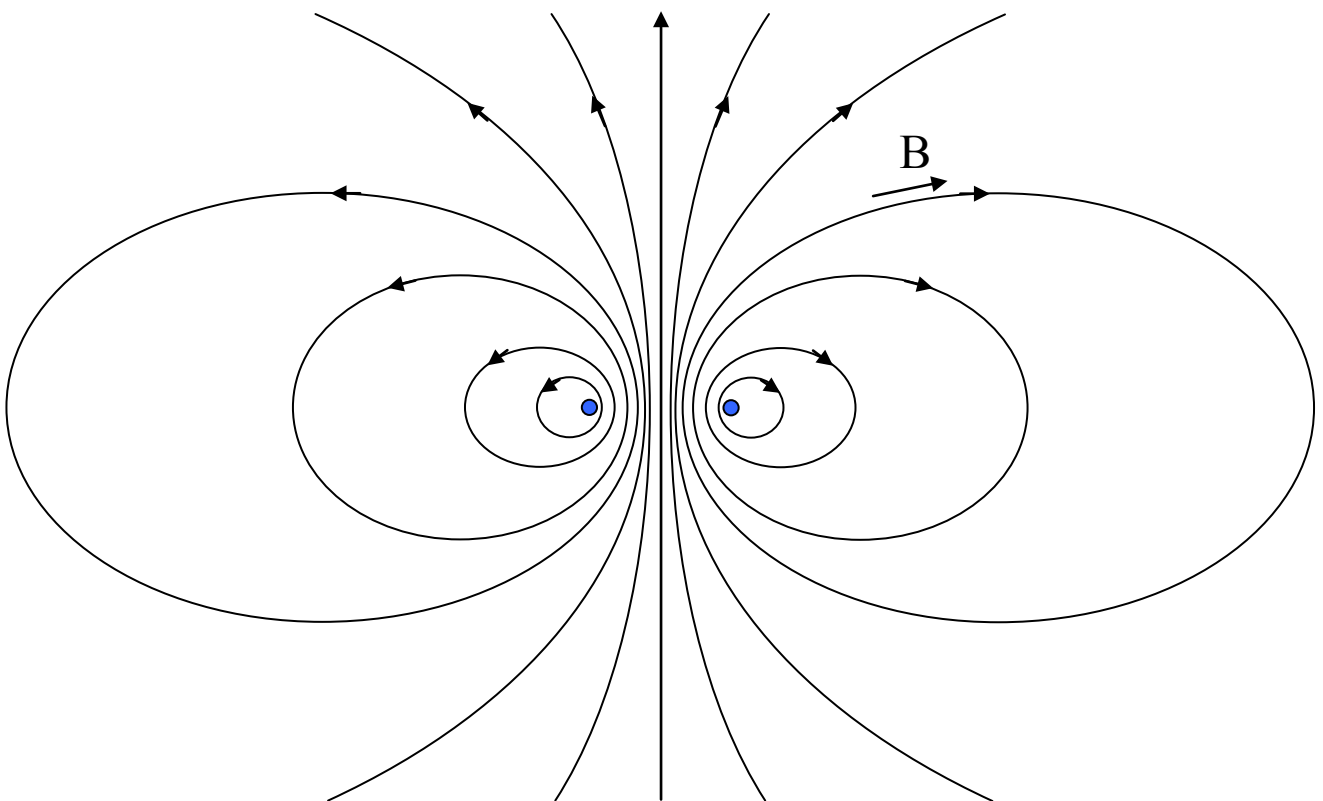
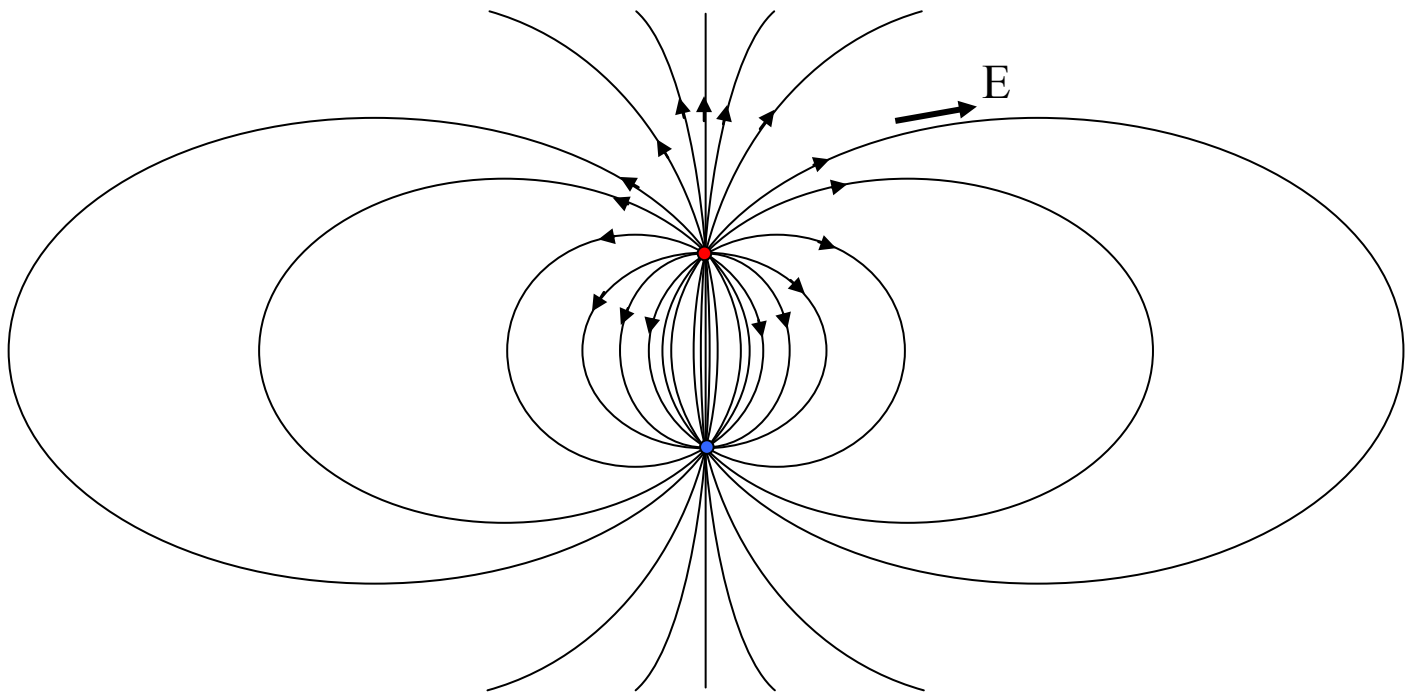
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IS}{2\pi r_0^3} \vec{N} + 3 \frac{\mu_0 IS}{4\pi r_0^4} \cos \theta_0 (\vec{y}_0 \wedge \vec{r}_0) = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi r_0^3} + 3 \frac{\mu_0}{4\pi r_0^5} (\vec{m} \wedge \vec{r}_0) \wedge \vec{r}_0$$

$\vec{m} = I\vec{S}$  - moment dipolaire magnétique

coordonnées sphériques :

$$B_r = \frac{\mu_0 m}{2\pi r_0^3} \sin \theta_0, \quad B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r_0^3} \cos \theta_0$$

même comme le dipôle électrique



## Force d'un champ externe sur un dipôle magnétique

1. Force résultante :

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = I \oint_L d\vec{r} \wedge \vec{B}$$

Si l'axe z est choisi parallèle à  $\vec{m}$ , on peut démontrer (TD), que :

$$F_x = m_z \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad F_y = m_z \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad F_z = m_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \text{ou}$$

$$\vec{F} = \nabla \vec{B} \cdot \vec{m} \quad (\text{dipôle électrique : } \vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E})$$

2. Moment de torsion :

$$d\vec{T} = \vec{r} \wedge d\vec{F} = I \vec{r} \wedge (d\vec{r} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{T} = I \oint_L \vec{r} \wedge (d\vec{r} \wedge \vec{B}) = I \oint_L \left[ d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) + \vec{B} (d\vec{r} \cdot \vec{r}) \right]$$

$$\begin{aligned} (d\vec{r} \times \vec{r}) \times \vec{B} &= \vec{r} (d\vec{r} \cdot \vec{B}) - d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) \\ &= \vec{r} (d\vec{r} \cdot \vec{B}) + d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) + \vec{r} (\vec{r} \cdot d\vec{B}) - \vec{r} (\vec{r} \cdot d\vec{B}) - 2d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) \\ &= d[\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B})] - \vec{r} (\vec{r} \cdot d\vec{B}) - 2d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{T} &= \frac{I}{2} \oint_L 2d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) + I \oint_L \vec{B} (d\vec{r} \cdot \vec{r}) \\
&= -\frac{I}{2} \left[ \oint_L (d\vec{r} \wedge \vec{r}) \times \vec{B} + \cancel{\oint_L d[\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{B})]} - \oint_L \vec{r} (\vec{r} \cdot d\vec{B}) \right] + I \oint_L \vec{B} (d\vec{r} \cdot \vec{r}) \\
&\approx -\frac{I}{2} \left( \oint_L d\vec{r} \wedge \vec{r} \right) \times \vec{B} + I \vec{B} \frac{1}{2} \cancel{\oint_L d(\vec{r} \cdot \vec{r})} = I \vec{S} \wedge \vec{B}
\end{aligned}$$

$$\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad (\text{dipôle électrique } \vec{T} = \vec{p} \wedge \vec{E})$$

Conclusions :

1. Si le moment du dipôle magnétique est parallèle à B, pas de torsion
2. La force générale  $\sim \text{Grad } B$  (et pas à B)
3. Le champ du dipôle – comme le champ d'un aimant

## Interactions magnétiques

Pour l'instant :

### I. Champ :

1. Champ créé par une charge en mouvement

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \vec{v} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

2. Champ créé par un élément de courant :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{\ell} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} \text{ (Biot-Savart)}$$

3. Champ de fil droit  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi d} \vec{I} \wedge \frac{\hat{d}}{d}$  (d – distance de fil)

4. Champ de boucle de courant : dipôle magnétique

### II. Force magnétique sur

1. Charge

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \text{ (partie magnétique de la force de Lorentz)}$$

effet Hall, mouvement cyclotron

2. Élément de courant :  $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B}$  - loi de Laplace

3. Fil droit :  $\vec{F} = I\vec{L} \wedge \vec{B}$

4. Dipôle magnétique :  $\vec{F} = \nabla \vec{B} \cdot \vec{m}$  (force résultante)

$$\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B} \text{ (moment de torsion)}$$

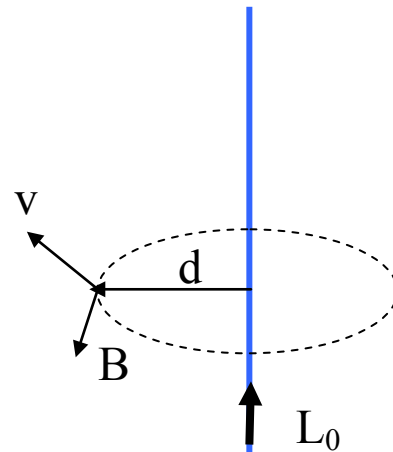
Maintenant :

### III. Interactions entre les 'éléments' magnétiques

1. Force sur une charge en mouvement exercée par une ligne droite de courant

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi d} \vec{I} \wedge \frac{\hat{d}}{d}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi d} qI\vec{v} \wedge \left( \vec{L}_0 \wedge \frac{\hat{d}}{d} \right)$$



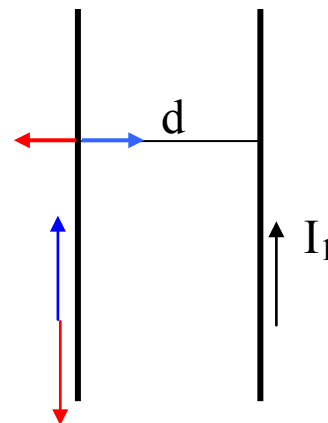
Pour  $v$  – parallèle à  $I$  :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi d} qIv\hat{d} \text{ - force de l'attraction ou de la répulsion par la ligne}$$

2. Force entre deux lignes de courant parallèle :

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 q_2 v_2 \hat{d} = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 L_2 \hat{d}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{F}}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 \hat{d}$$



e.g. courant  $I = 50 \text{ A}$ ,  $d = 1 \text{ cm}$  :

$$F/m = 4\pi 10^{-7} \cdot 50 \cdot 50 / 2\pi 10^{-2} \text{ N/m} = 0.05 \text{ N/m}$$

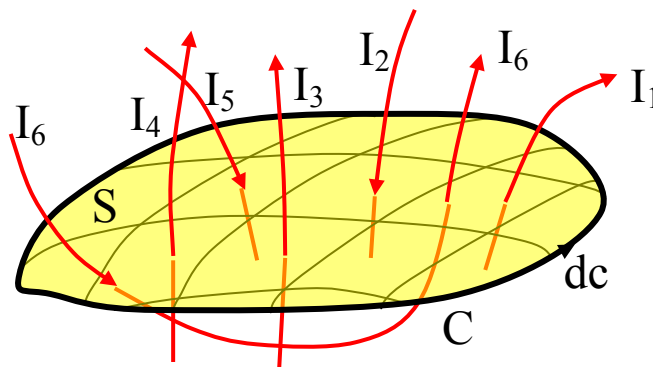
Courants co-directionnels : attraction  
 contre-directionnels : répulsion  
 (les mesures faites par Ampère)

## Théorème d'Ampère

Circulation de champ magnétique est égale à la somme des

courants multipliée par  $\mu_0$  :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 \sum_{\text{encerclés par C}} I$$



Remarques :

1. Les contributions

$$\text{de } I_{1,3,4} > 0$$

$$\text{de } I_{2,5} < 0$$

$$\text{de } I_6 = 0$$

2. Le théorème ne dépend pas de S (C – contour de S)

3. Il joue le même rôle pour calculer le champ magnétique que le théorème de Gauss pour le champ électrique

4. Il représente la forme intégrale de la quatrième équation de Maxwell (cas statique)



Démonstration :

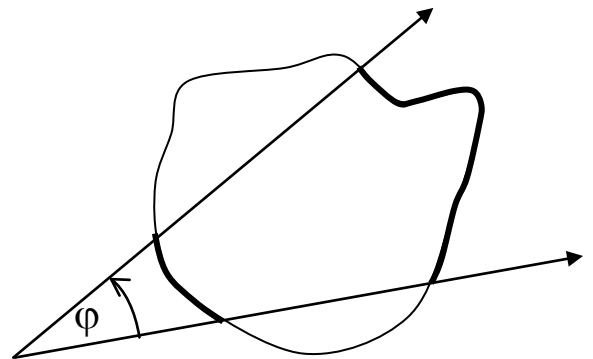
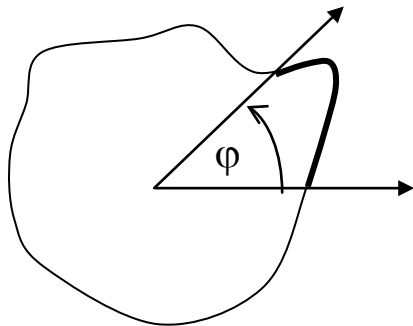
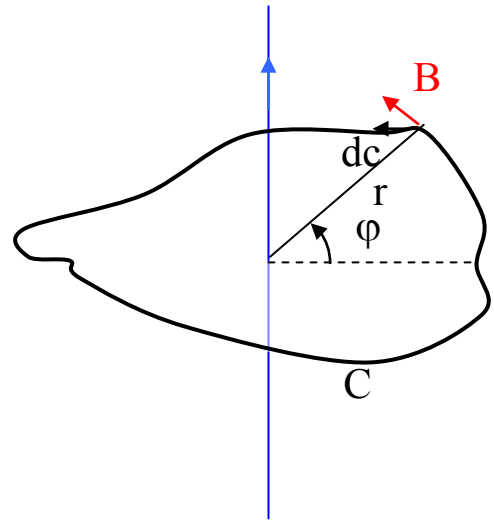
1. Une ligne de courant droite :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \oint_C B dc_B = \oint_C B r d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C \frac{1}{r} r d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\varphi$$

$$\oint_C d\varphi = \begin{cases} 2\pi & \text{- la prolongation de } d\ell \text{ traverse } C \\ 0 & \text{- la prolongation de } d\ell \text{ ne traverse pas } C \end{cases}$$



Remarque : car  $B \perp I$  et  $B \perp r$ ,

$\Rightarrow dc_B = r d\varphi$  pour chaque C (circulaire ou non, plat ou non)

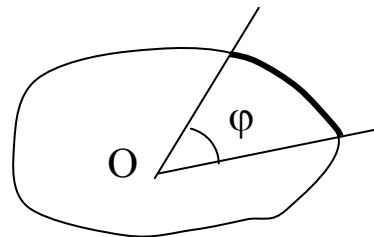
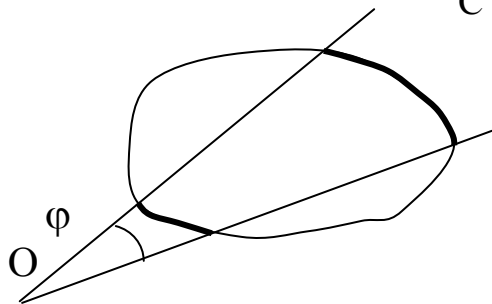
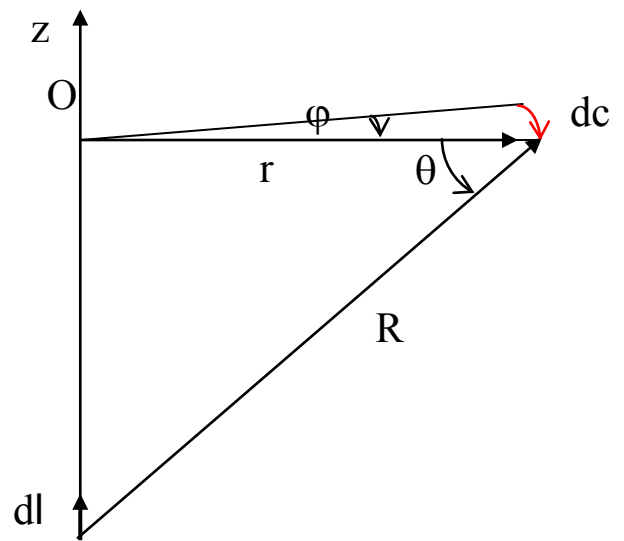
## 2. Cas général (ou presque – Ampère utilisa trois expériences)

$$dB_{dl} = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi R^3} R \cos \theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{rd\theta}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^3 \theta}{r^3} \frac{r}{\cos \theta} \cos \theta$$

$$\left( \begin{array}{l} \frac{z}{r} = \cos \theta \Rightarrow dz = d\ell = \frac{rd\theta}{\cos^2 \theta} \\ R = \frac{r}{\cos \theta} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow dB_{dl} = \frac{\mu_0 I \cos \theta}{4\pi r} d\theta \Rightarrow \oint_C dB_{dl} dc_B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{\cos \theta}{r} d\theta r d\varphi$$



O – à l'extérieur- le contour est passé 2 fois dans les directions opposées :  $\oint_C d\varphi = 0$ .

O – à l'intérieur :  $\oint_C d\varphi = 2\pi$

$$\Rightarrow \oint_C dB_{dl} dc_B = \frac{\mu_0 I}{2} \cos \theta d\theta$$

$$\oint_C dB dc_B = \mu_0 I \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\sin \theta = \mu_0 I$$

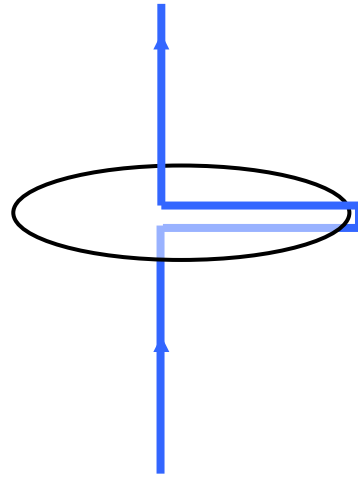
$$= 0$$

O – à l'intérieur

O – à l'extérieur

### 3. Cas plus général

(e. g. la preuve ne marche pas pour le courant suivant :)



Si on considère un seul segment,  
les résultats sont différents :  
prenons une ligne pour  $z < 0$  (ou  $> 0$ )

$$\int_{z < 0} \cos \theta d\theta = 1 \text{ et non } 2$$

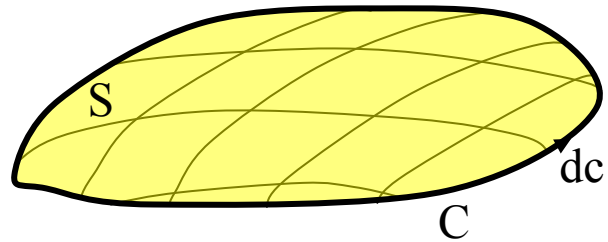
Question : Un segment – existe-t-il ?

Oui : une ligne entre les deux sphères chargées

Mais ce cas n'est pas statique – on verra plus tard

**Théorème de Stokes :**

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{c} = \int_{S_C} \text{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

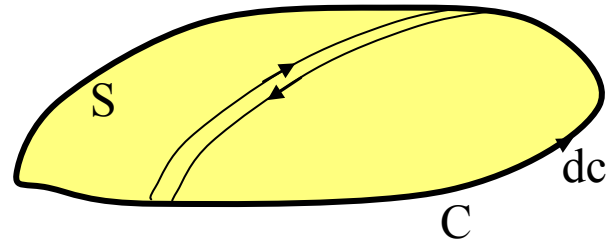


preuve (comme le théorème d'Ostrogradski-Gauss) :

**S – divisée en deux :**

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{c} = \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{c} + \oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{c}$$

(les contribution des parties internes s'annulent)



**S – divisée en N parties :**

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{c} = \sum_{j=1}^N \oint_{C_j} \vec{F} \cdot d\vec{c} = \sum_{j=1}^N \frac{\oint_{C_j} \vec{F} \cdot d\vec{c}}{S_j} S_j$$

espérons que la limite suivante existe et appelons cette limite rotationnel de  $\vec{F}$  ( $\text{rot} \vec{F}$ ) :

$$\text{rot} \vec{F} \cdot \hat{N} = \lim_{S_j \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_j} \vec{F} \cdot d\vec{c}}{S_j}$$

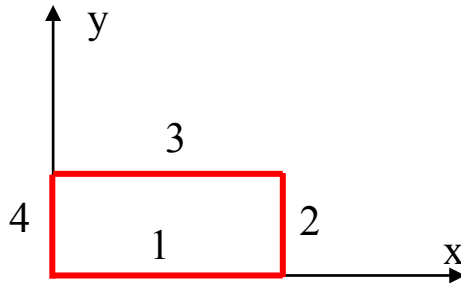
Par exemple :  $(\text{rot} \vec{F})_x = \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{x}$ , etc.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{c} = \lim_{S_j \rightarrow 0} \sum_j S_j \frac{\oint_{C_j} \vec{F} \cdot d\vec{c}}{S_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{S_j \rightarrow 0} S_j \lim_{S_j \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_j} \vec{F} \cdot d\vec{c}}{S_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{S_j \rightarrow 0} S_j (\text{rot} \vec{F} \cdot \hat{N}_S) = \int_S \text{rot} \vec{F} \cdot \hat{N}_S ds$$

## L'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes

Boucle rectangulaire avec  $\hat{\vec{N}} = \hat{\vec{z}}$  :



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{c} = \int_1 F_x dx + \int_2 F_y dy + \int_3 F_x dx + \int_4 F_y dy$$

$$\int_1 F_x dx + \int_3 F_x dx \approx \int_x^{x+\Delta x} \left[ F_x(x, y) + \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial x} x \right] dx$$

$$+ \int_{x+\Delta x}^x \left[ F_x(x, y + \Delta y) + \frac{\partial F_x(x, y + \Delta y)}{\partial x} x \right] dx$$

$$\approx \int_x^{x+\Delta x} \left[ F_x(x, y) + \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial x} x \right] dx$$

$$- \int_x^{x+\Delta x} \left[ F_x(x, y) + \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial x} x + \frac{\partial^2 F_x(x, y)}{\partial x \partial y} \Delta y x \right] dx$$

$$\approx - \int_x^{x+\Delta x} \left[ \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} \Delta y \right] dx \approx - \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} \Delta y \Delta x = - \frac{\partial F_x(x, y)}{\partial y} \Delta s$$

même :

$$\int_2 F_y dy + \int_4 F_y dy \approx \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta s$$

$$(\text{rot} \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y};$$

$$(\text{rot} \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x};$$

$$(\text{rot} \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

Rotationnel de B :

$$\int_{S_C} \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 \sum_j I_j \stackrel{\text{def.}}{=} \mu_0 \int_{S_C} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad \text{pour chaque } S$$

*Ampère*

$$\Downarrow$$

$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

(J – densité de courant)

Rotationnel de E :

Déjà vu :

$q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{c} = W_{BA}$  - travail pour déplacer q entre A et B ne dépend pas du chemin AB

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{c} + \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{c} = 0 \quad \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = 0$$

## Les équations principales d'électrostatique et magnétostatique

| Forme différentielle :                        | intégrale :  | sens physique :           |
|---|--|---------------------------|
| $\text{rot}\vec{E} = 0$                       | $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{c} = 0$                         | force conservative        |
| $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ | $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{VS}}{\epsilon_0}$ | conservation de charge    |
| $\text{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$           | $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \mu_0 I_C$                 | courants stationnaires    |
| $\text{div}\vec{B} = 0$                       | $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$                         | pas de charge magnétiques |

Conséquence pour J :  $\text{div}(\text{rot}\vec{B}) = 0 \Rightarrow \text{div}\vec{J} = 0$

Valable pour des courants stationnaires (qui ne dépendent pas de

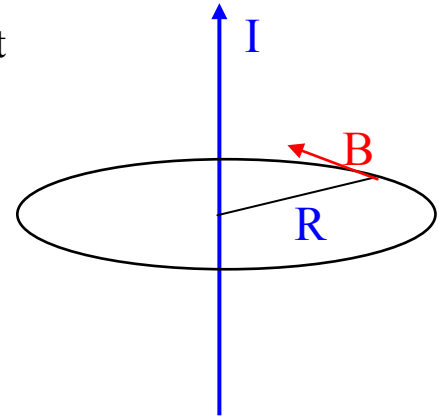
temps) :  $\text{div}\vec{J} = 0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0$  - flux de courant à travers

d'une surface fermée est nul (si non, on va avoir l'accumulation de charges).

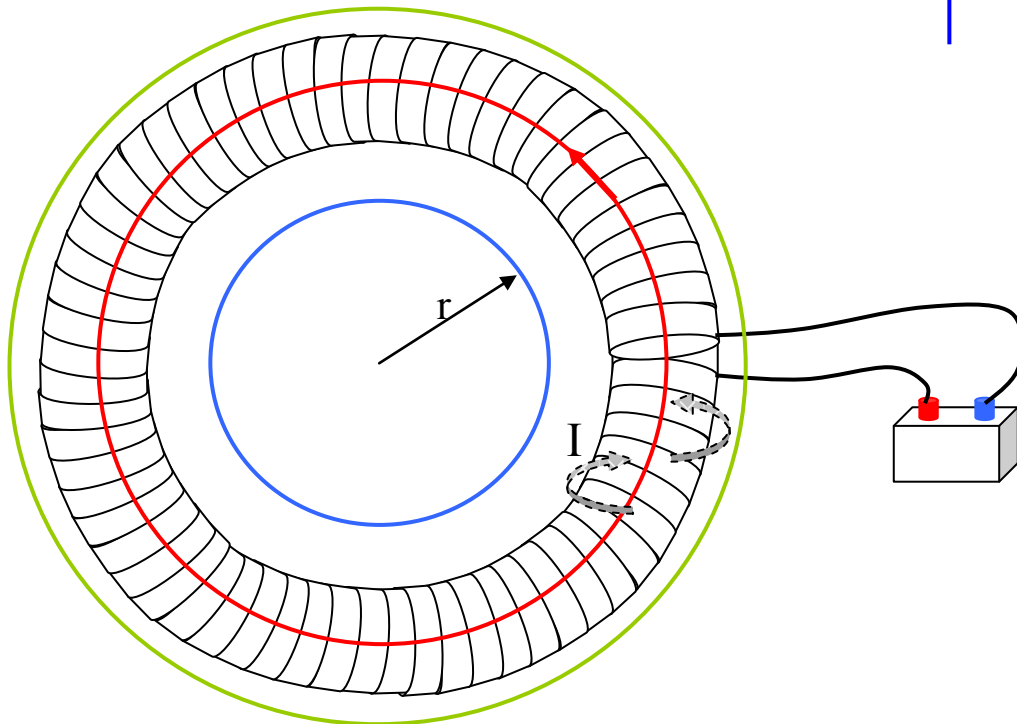
Le théorème d'Ampère joue le même rôle en magnétostatique que le théorème de Gauss en électrostatique (on a vu que le théorème de Gauss pour le champ magnétique n'est pas très utile pour calculer le champ).

**Exemple 1 :** Champ d'une ligne de courant

$$\mu_0 I = \oint_{\text{cercle}} B d\ell = B 2\pi R \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



**Exemple 2 :** Tore

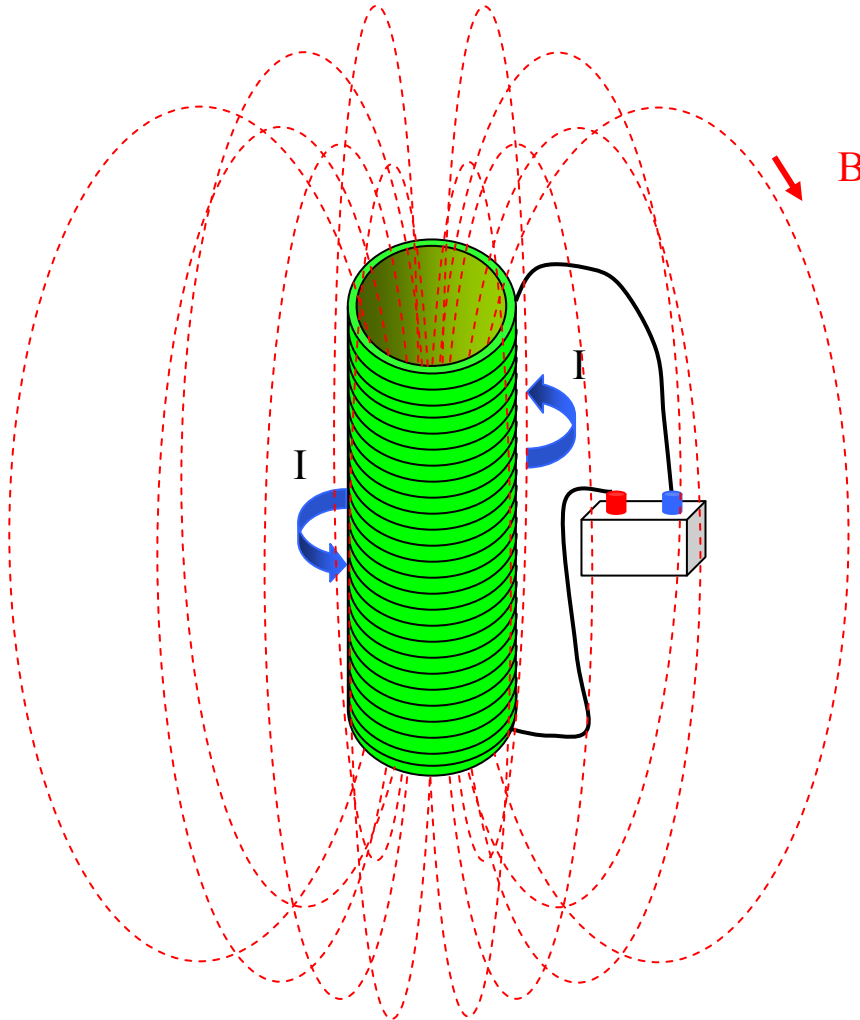


$$\left. \begin{array}{l} \text{vert : } \oint_C B d\ell = 2\pi r B = 0 \\ \text{bleu : } \oint_C B d\ell = 2\pi r B = 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \boxed{\sum I = 0}$$

$$\text{rouge : } \oint_C B d\ell = 2\pi r B = \mu_0 I N \Rightarrow B = \mu_0 I \frac{N}{2\pi r} = \mu_0 I \frac{N}{L}$$



### Exemple 3 : Champ d'un solénoïde (bobine cylindrique)

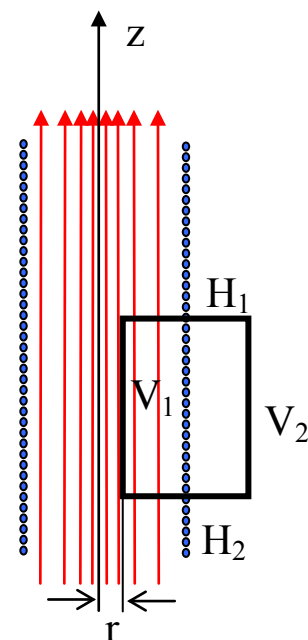


Calculer 'sans calculs' :

$L$  (longueur)  $\gg$  diamètre :

1.  $B$  ne dépend pas de  $z$  loin des bouches :
2. solénoïde = tore ( $r \rightarrow \infty$ )

**champ à l'extérieur 0**



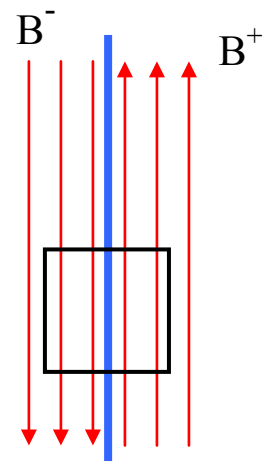
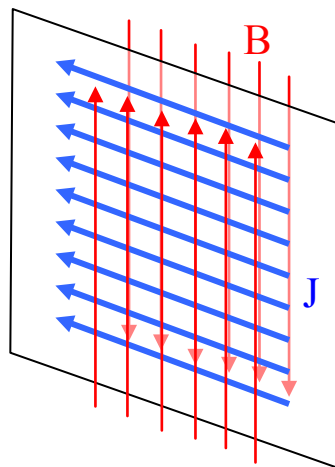
à l'intérieur :

$$\mu_0 I N = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{c} = \int_{V_1} B(r) dc + \int_{V_2} 0 dc + \int_{H_1} 0 dc + \int_{H_2} 0 dc$$

$\mu_0 I N = B(r) L$ , mais le résultat ne dépend pas de  $r$

$$B = \mu_0 I n, \quad n - \text{densité de tours}$$

**Exemple 4** : Nappe de courant



$$\mu_0 I L = B^+ L - B^- L ; \quad \text{symétrie : } |B^+| = |B^-|$$

$$\Rightarrow B^+ = -B^- = \frac{\mu_0 I / L}{2} = \frac{\mu_0 J}{2}$$

## Discontinuité de champ magnétique

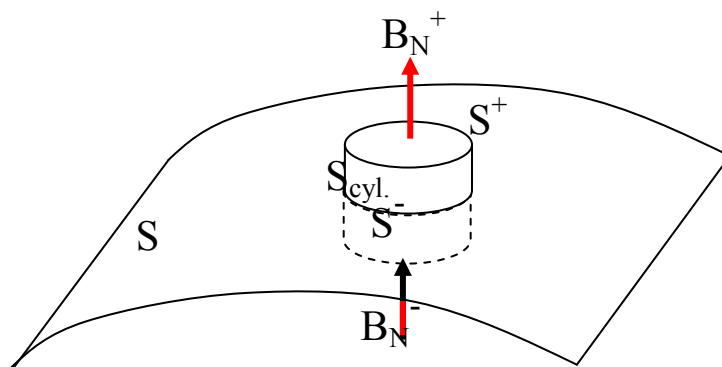
1. Nappe plane avec J uniforme :

$$B_N = 0 \Rightarrow \Delta B_N = 0, \quad \Delta B_T = \mu_0 J \text{ et } \Delta B_T \perp J$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{B}_T = \hat{N}_S \wedge \vec{J}$$

2. Cas général (une surface arbitraire et l'existence d'autres sources)

a)



$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\sum S} \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ &= \int_{S_{cyl}} \vec{B}_T \cdot d\vec{S}_{cyl} + \int_{S^+} B_N^+ dS - \int_{S^-} B_N^- dS \xrightarrow{S_{cyl} \rightarrow 0} \int_{S^\pm} (B_N^+ - B_N^-) dS \end{aligned}$$

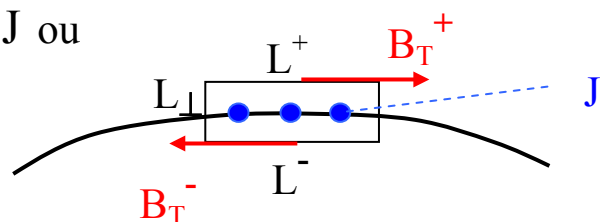
valable pour chaque  $S^\pm \Rightarrow B_N^+ = B_N^-$

b)

$$\mu_0 J L^\pm = \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{c} \xrightarrow{L_\perp \rightarrow 0} \int_{L^+} B_T^+ dc - \int_{L^-} B_T^- dc = \int_{L^\pm} (B_T^+ - B_T^-) dc$$

pour chaque  $L^\pm \Rightarrow \Delta B_T = \mu_0 J$  ou

$$\Rightarrow \Delta \vec{B}_T = \mu_0 \hat{N}_S \wedge \vec{J}$$



### Force magnétohydrodynamique

Si  $B_1$  et  $B_2$  sont des valeurs tangentielles du champ magnétique aux deux côtés de surface d'une nappe de courant ayant une densité de courant  $J$  :

Champ moyen :  $B_{T,\text{moyen}} = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)$

La force sur  $1\text{m}^2$  :  $F/S = \frac{1}{2}(B_1 + B_2)J$

$$= \frac{1}{2}(B_1 + B_2) \frac{1}{\mu_0}(B_1 - B_2) = \frac{B_1^2 - B_2^2}{2\mu_0}$$

Sans champ externe  $|B_1| = |B_2|$  : pas de force.

Dans champ externe  $\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{B}_N + \vec{B}_{//\vec{J}} + \vec{B}_{\perp\vec{J}}$ , la partie normale à la surface  $\vec{B}_N$  va dévier le courant dans le plan de la nappe, la partie parallèle au courant  $\vec{B}_{//\vec{J}}$  ne va pas réagir sur le courant et la partie tangentielle de la nappe et perpendiculaire au courant  $\vec{B}_{\perp\vec{J}}$  va s'ajouter aux composantes tangentielles du champ créé par le courant de la nappe  $B_1$  et  $B_2$  (qui ont les signes différentes à deux côtés de la nappe) :

$$\frac{F_N}{S} = \frac{(B_1 + B_{\perp\vec{J}})^2 - (B_1 - B_{\perp\vec{J}})^2}{2\mu_0} = 2JB_{\perp\vec{J}}$$

Cette force va dévier le courant en direction perpendiculaire de la nappe.

## Potentiel vecteur

Pour le champ électrique on a introduit le potentiel :

$$V = \int_{\text{Volume}} \frac{\rho_v}{4\pi r} dv$$

et le champ électrique est égal au gradient  $V$  :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V.$$

Pour le champ magnétique ça n'est marche pas, car  $\text{rot} B \neq 0$  est  $\nabla \wedge (\nabla U) = 0, \forall U$  ( $\vec{\nabla}$  est parallèle à  $\vec{\nabla} U$ ).

On peut introduire une fonction vectoriel, appelée **potentiel vecteur** :

$$A : \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}.$$

La deuxième équation pour  $B$  ( $\nabla \cdot B = 0$ ) est automatiquement satisfaite pour  $A$ .

Comme le potentiel électrique,  $A$  est défini à une fonction près :  
Si

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad} \varphi \Rightarrow B \text{ reste le même.}$$

Au lieu d'ajouter  $\text{grad} \varphi$ , on est libre de choisir différemment  $\text{div} A$  :

$$\text{div} \vec{A}' = \text{div} \vec{A} + \nabla^2 \varphi \Rightarrow \text{pour chaque } A \text{ on peut choisir } \varphi :$$

$$\nabla^2 \varphi = -\text{div} \vec{A} \Rightarrow \text{div} \vec{A}' = 0 \text{ sans changement de } \text{rot} A.$$

En magnétostatique la meilleur choix est  $\text{div} \vec{A} = 0$  (on verra immédiatement pourquoi).

Détermination de  $\vec{A}$  :

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\Rightarrow \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} \quad \text{est-ce que cette équation est plus utile ?}$$

Utilisons  $\text{div} \vec{A} = 0$  :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\cancel{\nabla \cdot \vec{A}}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Ca représente 3 équations de Poisson pour les trois composants de  $\vec{A}$  :

$$\nabla^2 A_{x,y,z} = -\mu_0 J_{x,y,z}$$

**Rappel** pour le potentiel électrique :  $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$  avec solution

ayant la forme :

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\substack{\text{volume} \\ \text{de toutes} \\ \text{les charges}}} \frac{\rho(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{|\vec{r} - \vec{\tilde{r}}|} d\tilde{v}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\substack{\text{volume} \\ \text{de tous} \\ \text{les courants}}} \frac{\vec{J}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})}{|\vec{r} - \vec{\tilde{r}}|} d\tilde{v}$$

???

$$\text{div} \vec{A} = 0$$

$$\begin{aligned}
\nabla(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_J} \nabla(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{v}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_J} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla(\vec{r}) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{v}' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_J} \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{v}' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_J} \left\{ \left[ \nabla(\vec{r}') \cdot \vec{J}(\vec{r}') \right] \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{J}(\vec{r}') \cdot \nabla(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right\} d\vec{v}' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_J} \nabla(\vec{r}') \cdot \left[ \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d\vec{v}' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}
\end{aligned}$$

div J = 0

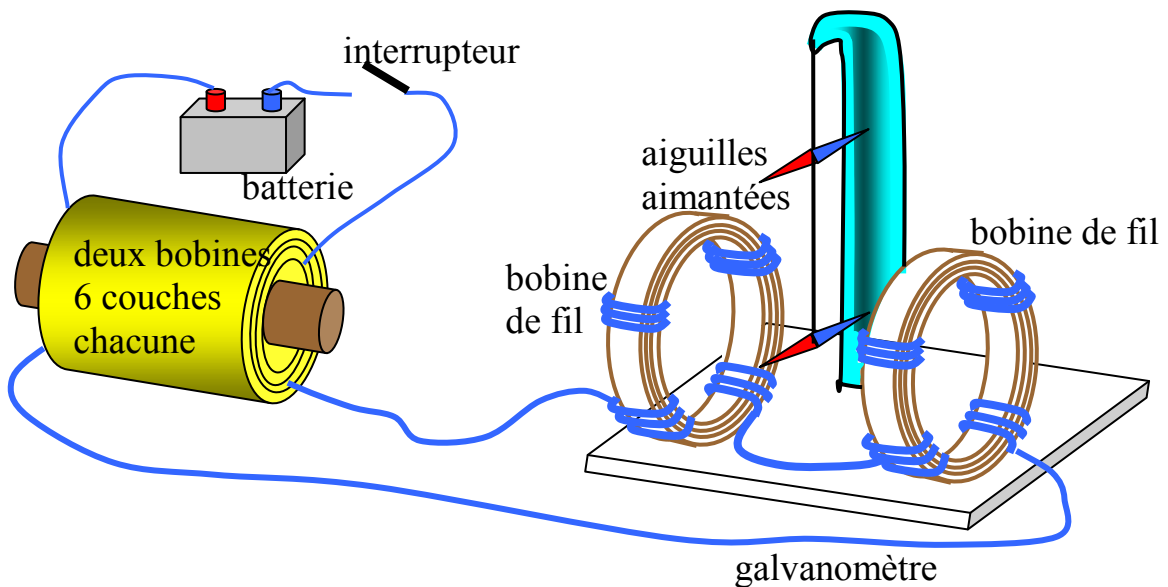
$$\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{s}(\vec{r}') = 0 \text{ pour les courant stationnaires.}$$

## L'induction électromagnétique

1. Un fil avec un courant constant produit un champ magnétique constant.
2. Un fil avec un courant constant placé dans un champ magnétique constant est soumis à une force perpendiculaire au courant.

Question : est-ce que le champ magnétique peut créer un courant électrique ?

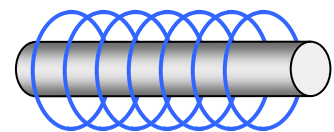
I. Quelques expériences de **Faraday** (entre 1831 et 1839) :



Deux aiguilles – la première pour compenser l'influence du champ magnétique terrestre. La déviation de la deuxième mesure le champ magnétique créé, donc le courant induit.

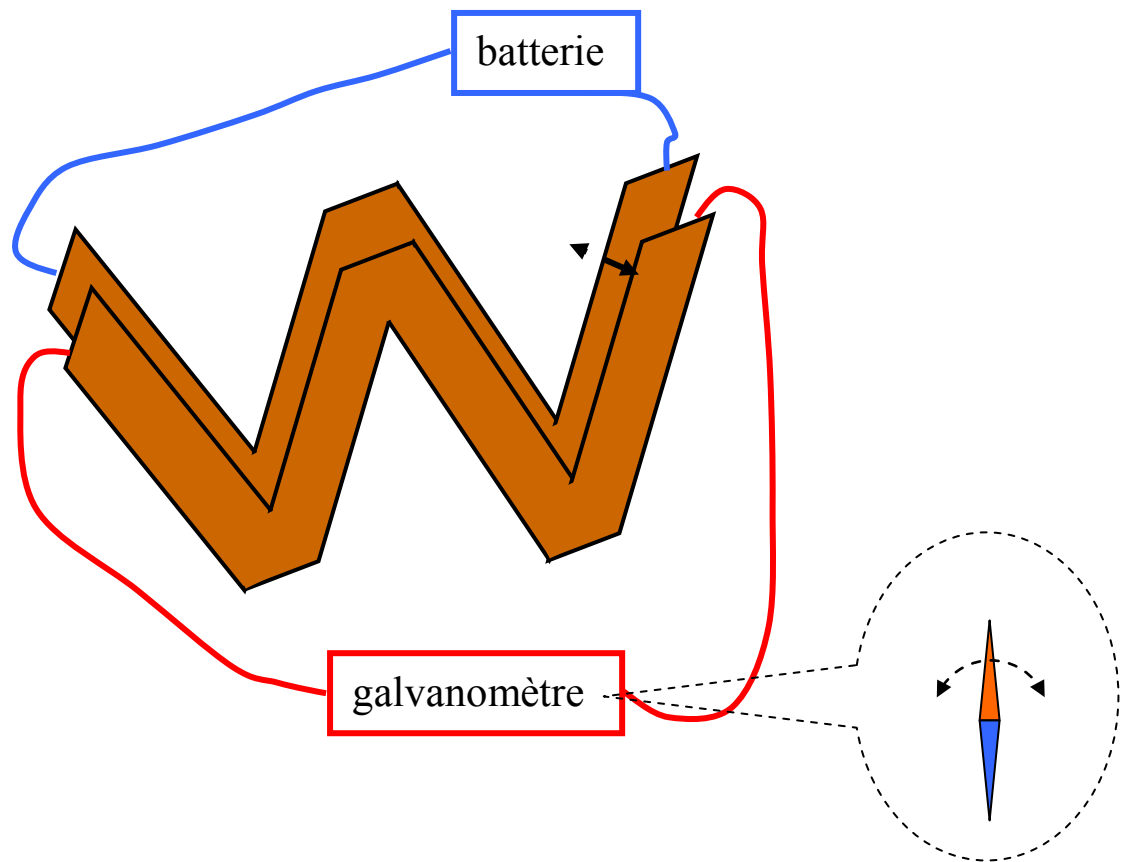
Interrupteur branché ou non – pas de déviation. Seulement pendant le branchement et de débranchement l'aiguille bouge.

Pour mesurer plus précisément ce mouvement Faraday remplaça le galvanomètre par un autre détecteur qui 'écrivait' les changements de courant – une bobine et une tige d'acier non-aimantée : le courant induit amène la tige dans un sens ou l'autre.





Deuxième expérience : deux plaques de cuivre ; en rapprochant et écartant les plaques l'aiguille de galvanomètre vibre



Conclusions :

Le courant électrique est induit :

- a) par changement de courant inducteur
- b) par mouvement relatif des fils

Quand les fils s'approchent, le courant induit est opposé au courant inducteur.

Explication :

Mouvement de charges dans un champ magnétique crée une force sur des charges

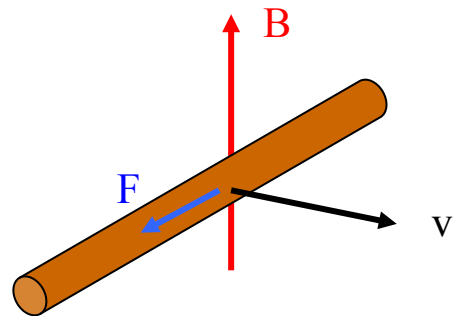
**Exemple 1** : Tige conductrice en mouvement dans un champ magnétique uniforme

Les charges libres sont soumises à une force

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

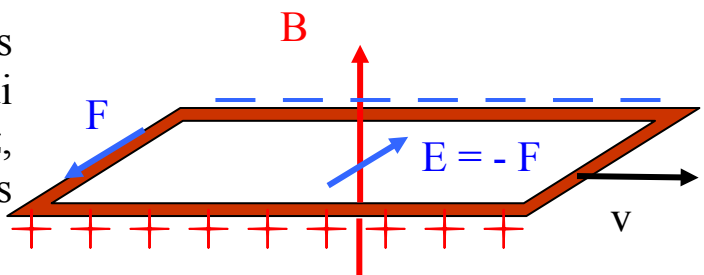
Elles se déplacent en direction de la force et un champ électrique est créé. En équilibre

$$q\vec{E} = -\vec{F}.$$



Pour étudier les courants, regardons une **boucle en mouvement inertiel dans un champ uniforme** :

La redistribution des charges crée un champ électrique qui compense la force de Lorentz, le mouvement de charges relatif à la boucle est arrêté.



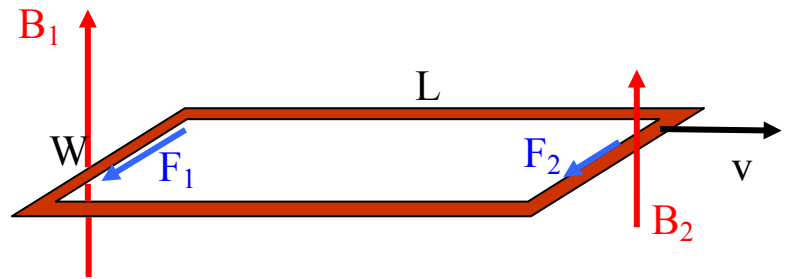
(La boucle doit inclure les détecteurs)

Conclusion : mouvement dans un champ magnétique uniforme ne crée pas de courant.

**Exemple 2 :** Un contour rectangulaire en mouvement inertiel dans un champ magnétique non-uniforme

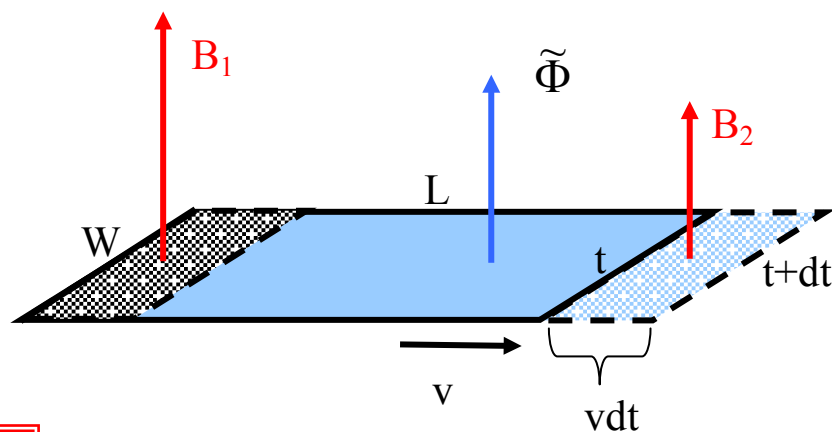
$$B_1 > B_2 \Rightarrow F_1 > F_2$$

La différence des forces crée un courant électrique (aussi en équilibre !)



Force électromotrice : le travail par unité de charge

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{q} \mathbf{F} \cdot \Delta \ell = v(B_1 - B_2)W = \frac{v dt}{dt} (B_1 - B_2)W \\ &= \frac{B_1 W dL - B_2 W dL}{dt} = -\frac{\tilde{\Phi}_2 - \tilde{\Phi}_1}{dt} = -\frac{\tilde{\Phi}_2 + \tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}_1 - \tilde{\Phi}}{dt} \\ &= -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{dt} = -\frac{\Phi(t+dt) - \Phi(t)}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} \end{aligned}$$

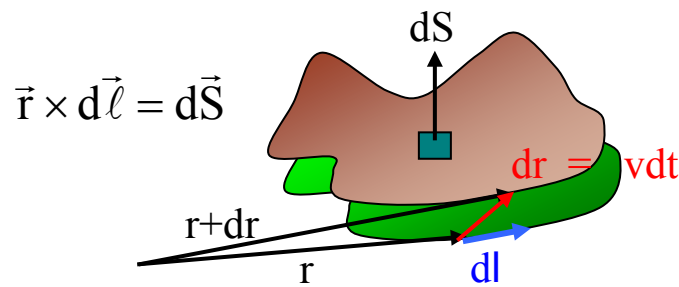


$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{S_c} \vec{B} \cdot d\vec{S}}$$

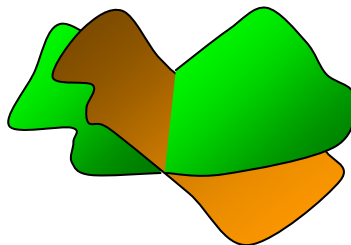
$$\mathcal{E} = \frac{1}{q} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_c} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\text{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}}$$

**Exemple 3** : un contour arbitraire dans un champ stationnaire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} &= \frac{1}{q} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = - \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{v} \wedge d\vec{\ell}) \\
&\stackrel{\text{B-stationnaire}}{=} - \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{v} dt \wedge d\vec{\ell}) = - \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot [(\vec{r} + d\vec{r} - \vec{r}) \wedge d\vec{\ell}] \\
&= - \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot [(\vec{r} + d\vec{r}) \wedge d\vec{\ell}] + \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot [\vec{r} \wedge d\vec{\ell}] \\
&= - \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{S}(t + dt) + \frac{1}{dt} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{S}(t) = - \frac{\Phi(t + dt) - \Phi(t)}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt}
\end{aligned}$$

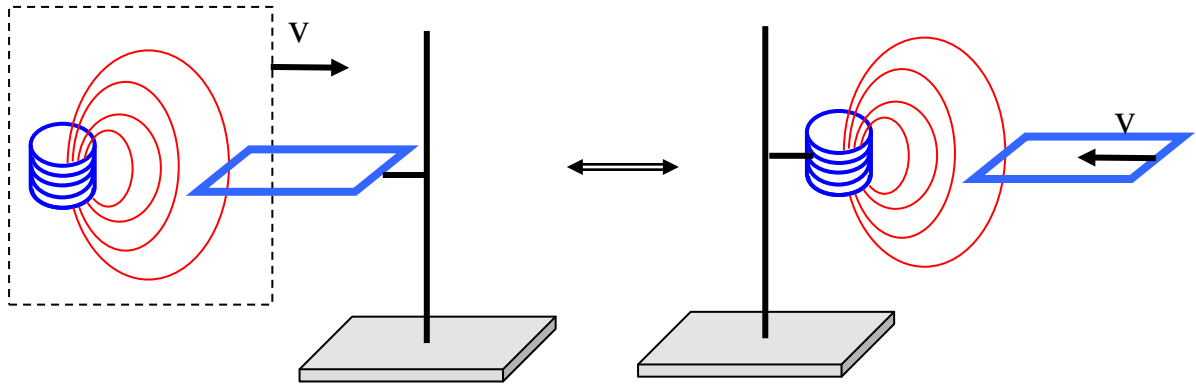


Remarque : l'équation est valable aussi pour la déformation du contour, pas seulement pour son déplacement



**Exemple 4 :** Une boucle stationnaire avec la source du champ en mouvement

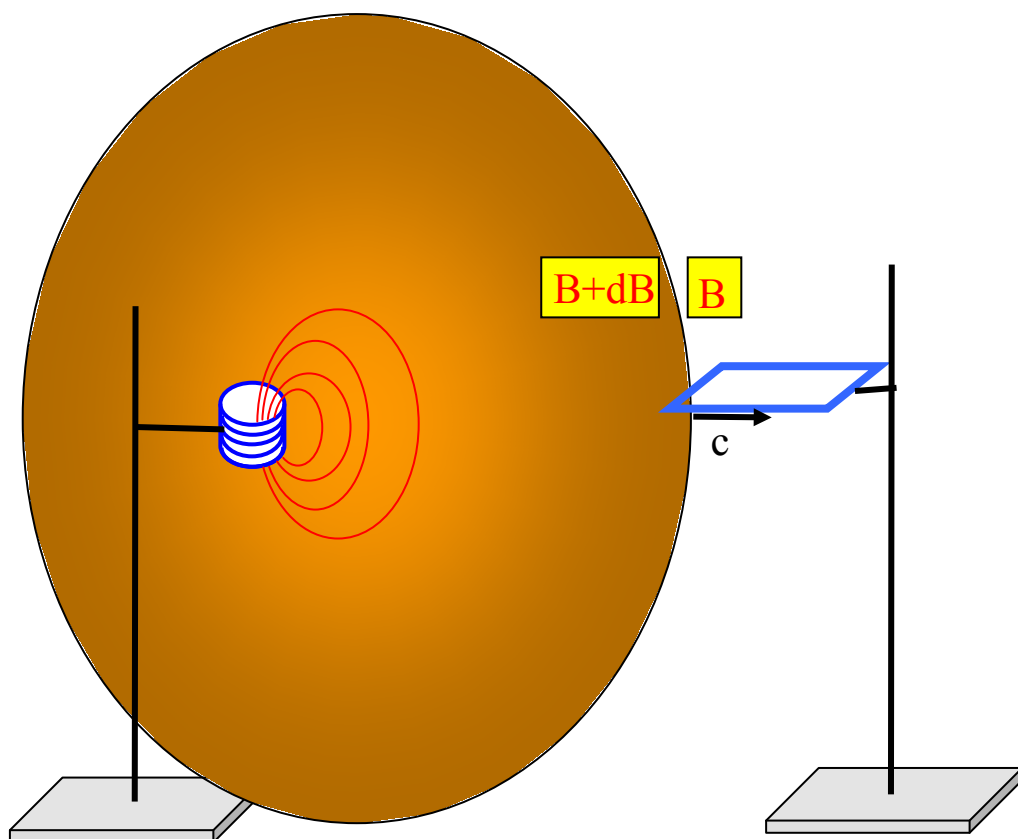
Principe d'équivalence des systèmes inertiels  $\Rightarrow$  même résultat



**Exemple 5 :** La source et la boucle stationnaires, le champ changeant

Réponse **instantanée** – pas de courant induit

**Relativité restreinte :** le changement se propage avec la vitesse  $c$  :

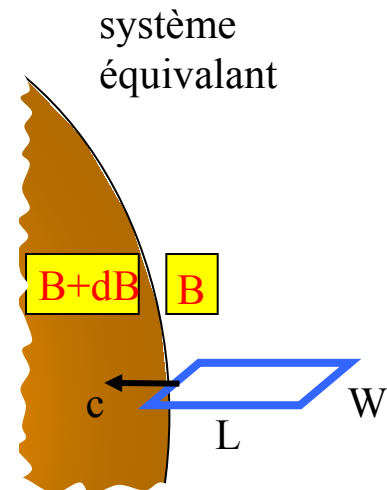


moment  $t$  :  $B$

$t + dt$  :  $B + dB$

$$\mathcal{E} = (B_1 - B_2)cW = -dBcW$$

$$= -d(BLW)/dt = -d\Phi/dt$$



Règle la plus générale (la loi **de l'induction électromagnétique**) :

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Si la force électromotrice s'applique dans un circuit, elle crée un courant électrique, qui crée un champ magnétique ayant la direction opposée au changement qui l'induit. Cette règle s'appelle loi de Lenz. Cette loi exprime la loi générale de la nature que chaque système a la tendance de s'opposer au changement.

On a déjà démontré, qu'à partir de la loi d'induction :

$$\boxed{\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad \text{une (la première) des équations de Maxwell}$$

(en électrostatique  $\text{rot} \vec{E} = 0$ )

Remarque importante : cette loi est aussi valable si il n'y a pas de circuits est de charges !

## Inductance mutuelle

Prenons deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  ayant une géométrie fixée. Si le circuit  $C_1$  est alimenté avec un courant  $I_1$ , le flux  $\Phi_{21}$  du champ magnétique  $B_1$ , crée par  $C_1$ , à travers de  $C_2$  est proportionnel au  $I_1$  :

$$\Phi_{21} = M_{21}I_1.$$

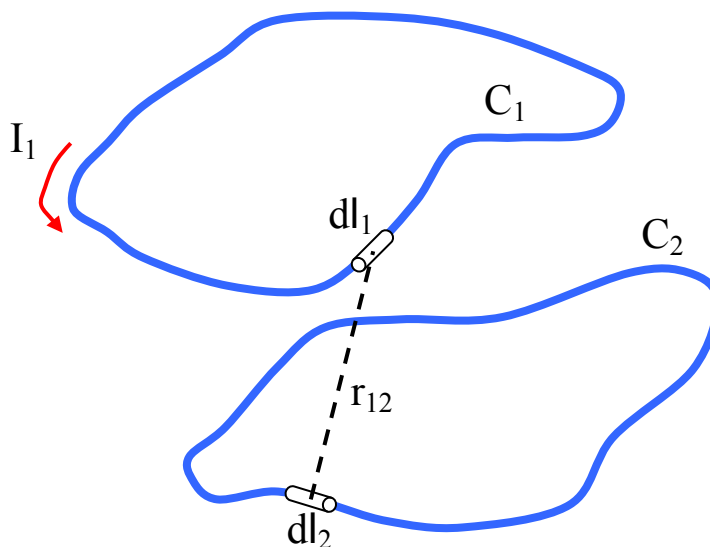
Soit la variation de  $I_1$  est lente. Si non, les points différents de  $C_2$  recevraient dans un moment fixé l'information différente de  $I_1$ , car cette information se propage avec la vitesse de la lumière  $c$ .

$$\frac{dI_1}{dt} \frac{L_2}{c} \ll I_1, \text{ ou } L_2 \text{ est la longueur de } C_2.$$

Dans ce cas, la force électromotrice induite dans  $C_2$  est donnée par :

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

$M_{21}$  – coefficient d'inductance mutuelle



Propriété :  $M_{21} = M_{12}$ .

La preuve :

$$\Phi_{21} = \oint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \int_{C_2} \text{rot} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \int_{C_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 = \int_{C_2} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \int_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1}{r_{21}} \right) \cdot d\vec{\ell}_2$$

$$\Rightarrow M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_2} \left( \int_{C_1} \frac{d\vec{\ell}_1}{r_{21}} \right) \cdot d\vec{\ell}_2 \quad \text{et} \quad M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \left( \int_{C_2} \frac{d\vec{\ell}_2}{r_{12}} \right) \cdot d\vec{\ell}_1$$

$$\text{mais } r_{21} = r_{12} \implies M_{21} = M_{12}$$



## Courant de déplacement

### Problème I : déjà

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\text{div} \vec{J} = 0 \quad - \text{magnétostatique (mouvement stationnaire de charges : } \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0)$$

Si les charges peuvent changer la densité ?

Conservation de charges :

$$\oint_{S_V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial Q_V}{\partial t} \quad (\text{signe moins, parce que } J \text{ est dirigé vers l'exterieur})$$

$$\oint_{S_V} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{J} dV$$

$$\frac{\partial Q_V}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad \text{pour } \forall V \Rightarrow \text{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

contradiction

$$\text{mais, } \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow \mu_0 \text{div} \vec{J} = \text{div}(\text{rot} \vec{B}) \equiv 0$$

## Problème II :

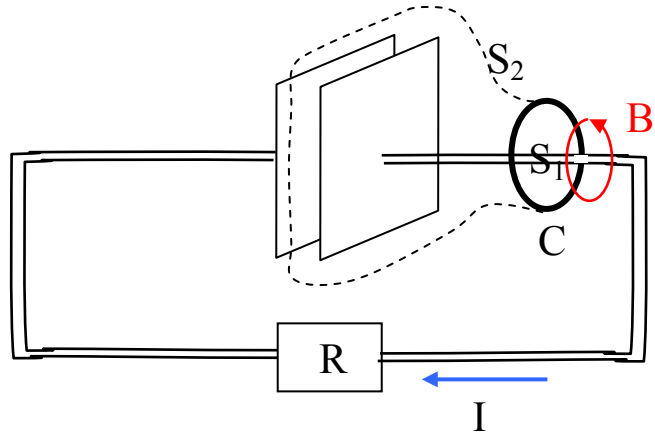
Théorème d'Ampère :  $\int_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum_{\in S_C} I$  pour chaque S

Soit un condensateur chargé. Fermons le circuit par une résistance et appliquons le théorème d'Ampère pour une courbe C autour de fil.

Sur  $S_1$  :

$$2\pi R_C B = \mu_0 I(t)$$

mais on peut utiliser la surface  $S_2$  qui passe entre les plaques où  $I = 0$ .



Remarque : on a déjà discuté qu'on ne peut pas utiliser le théorème d'Ampère pour les segments ouverts et c'est le cas !

Maxwell (1865) ajouta au courant des charges un autre courant  $J_d$ , appelé 'courant de déplacement' :

$$\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \vec{J}_d : \quad \vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{et l'équation pour } \text{rot} \vec{B} \Rightarrow \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

Questions :

1. Pourquoi exactement ce terme ?
2. Pourquoi Faraday ne l'a-t-il pas découvert ?
3. Quels sont les conséquences ?

Pourquoi  $+\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  ?

Conservation de la charge  $\Rightarrow \text{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Mais  $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$$\Rightarrow 0 = \text{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \text{div} \vec{J} + \epsilon_0 \text{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{div} \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

et si  $\vec{J} \rightarrow \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  1) la charge est conservée

2)  $\text{div}(\text{rot} \vec{B}) = 0$  est satisfaite.

**Conséquence I :** Un champ électrique en train de varier induit un champ magnétique.

Pourquoi Faraday ne l'a-t-il pas découvert ?

Retournons au condensateur :

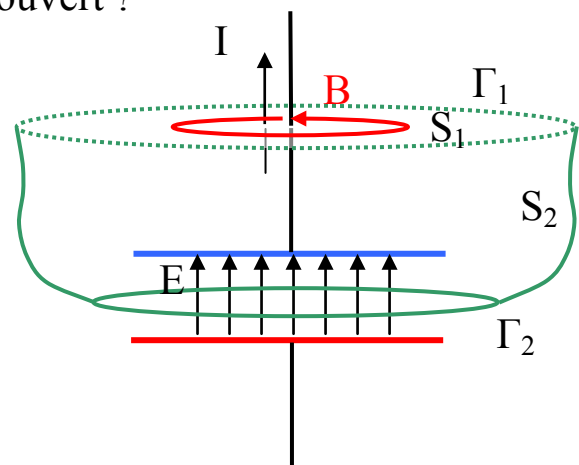
$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi R_{\Gamma_1} B$$

$$S_1 : 2\pi R_{\Gamma_1} B = \mu_0 I$$

$$\begin{aligned} S_2 : 2\pi R_{\Gamma_1} B &= \oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{S_2} \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \mu_0 \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_1+S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{Q}{\epsilon_0} = \mu_0 I \end{aligned}$$

$E \neq 0$  à l'intérieur

même résultat en mesurant  $I$  ou  $\partial E / \partial t$



En fait, la seule raison est que le courant de déplacement n'affecte pas l'équation responsable pour l'induction  $\text{rot}\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ .

Si  $\partial\vec{E}/\partial t$  est obtenu par le changement de courant, son effet direct, donne par la deuxième partie de l'équation  $\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$  est bien masquée par la première partie.

Pour détecter directement l'influence de la deuxième partie il faut ou

- 1) que la variation de champ électrique se produit pendant le temps que met la lumière pour traverser l'appareil, ou
- 2) qu'il n'y a pas de courant des charges (e.g., les ondes dans le vide, détectées 20 ans plus tard (1888) par Hertz

## Conséquence II :

Les équations de Maxwell :

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{l'équation d'induction}$$

$$\text{rot}\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\vec{J} \quad \text{le théorème d'Ampère + la contribution de Maxwell}$$

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{la conservation de la charge et la loi de Coulomb}$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad \text{l'absence de charges magnétiques}$$

**Conséquence III : Les ondes électromagnétiques.**

Sans charges et courants :

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} &= \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \vec{B}) = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0}$$

rien que l'équation de propagation d'onde dans le temps et l'espace

e.g. **une** solution – l'onde plane monochromatique :

$$\vec{E} = \vec{z}_0 E_0 \sin(kx - \omega t) ; \quad k - \text{fréquence spatiale (nombre d'onde),}$$

$\omega - \text{fréquence temporelle circulaire}$

Observations :

**1.**  $k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$ , mais  $\frac{\omega}{k} = v$  - la vitesse de propagation de l'onde. Maxwell nota que numériquement pour la vitesse de la lumière :

$$c = v = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

et conclut que **la lumière est une onde électromagnétique**

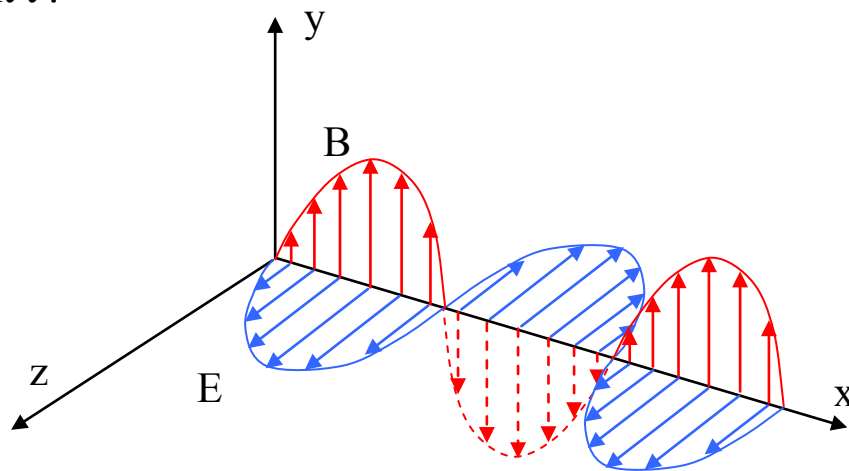
$$2. \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot} \vec{E} = \vec{y}_0 k \cos(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \vec{y}_0 \frac{k}{\omega} \sin(kx - \omega t) = \vec{y}_0 B_0 \cos(kx - \omega t)$$

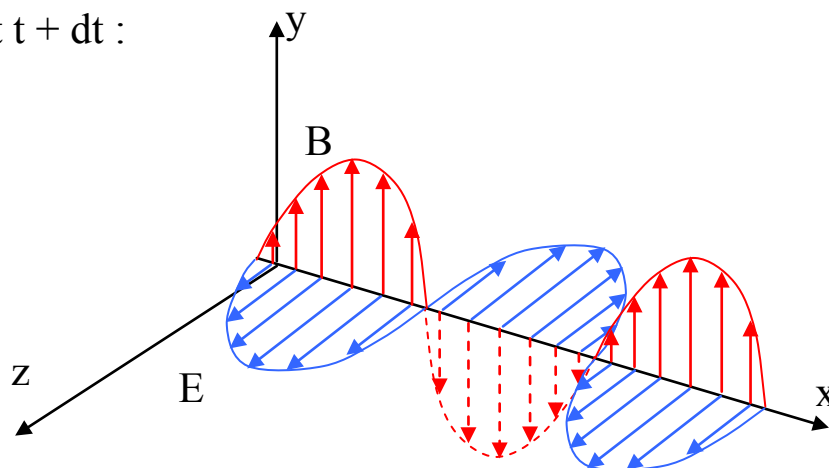
$$\text{avec } cB_0 = E_0,$$

donc l'onde électromagnétique est une onde transversale : E et B sont perpendiculaires à la direction de propagation.

moment t :



moment t + dt :




## Propriétés magnétiques des matériaux

Rappel :

force résultante sur un dipôle magnétique :  $\vec{F} = \nabla \vec{B} \cdot \vec{m}$

( $\vec{m} = I\vec{S}$  - moment dipolaire magnétique)

moment de torsion :  $\vec{T} = \vec{m} \wedge \vec{B}$

Dans électrostatique :  
moment dipolaire électrique  permanent  
induit

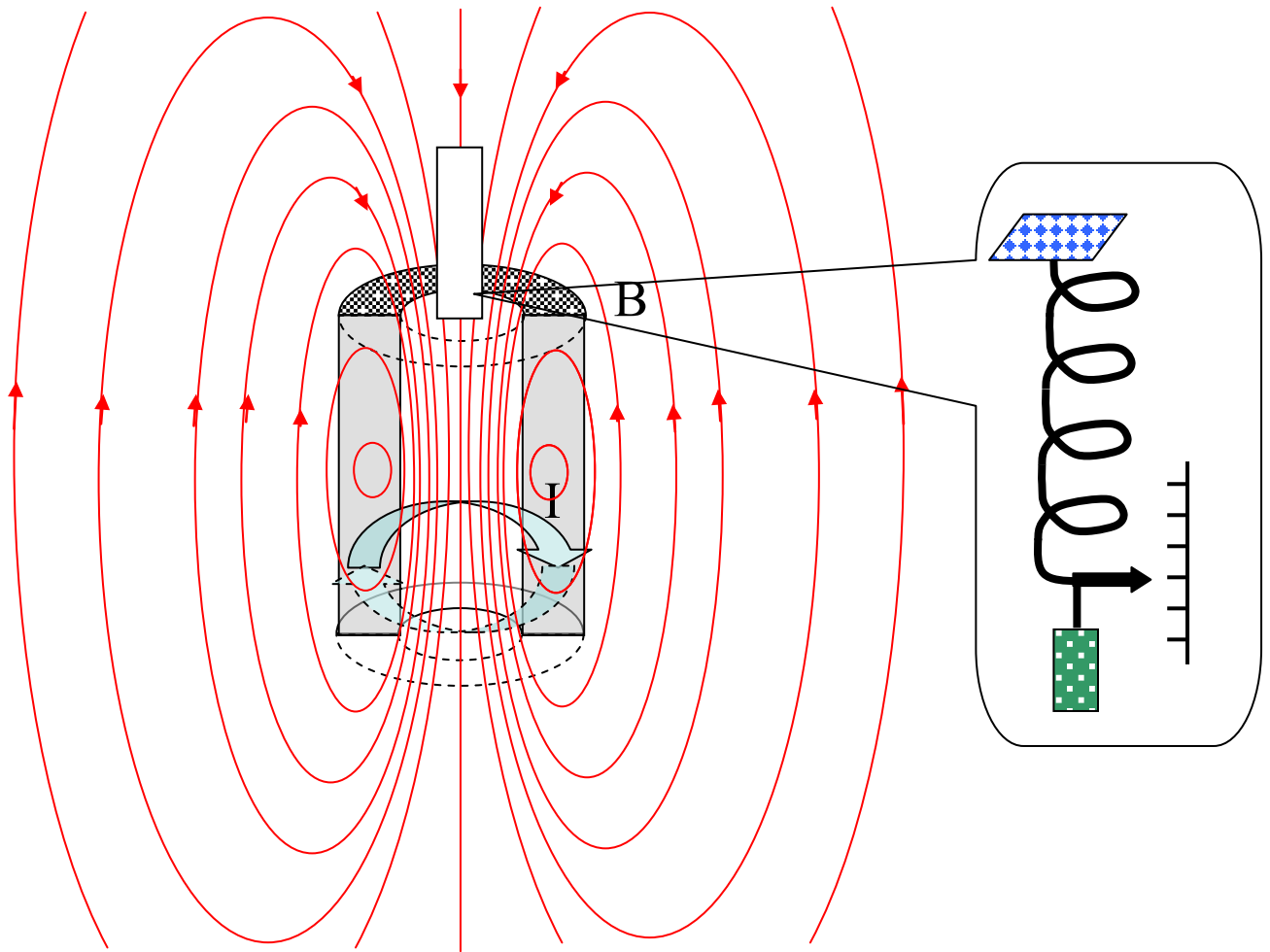
Le moment permanent est tourné dans la direction de  $E$ ,  
le moment induit est induit dans la direction de  $E$ .

- 1) le champ induit interne diminue le champ externe
- 2) les diélectriques et les conducteurs (neutres) sont retirés dans la direction d'augmentation du module du champ électrique

$$\vec{F} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}, \vec{p}_{\text{moyen}} \propto \vec{E}$$

Champ magnétique ?

Solénoïde – spire de courant, ou boucles multiples coaxiales, ou nappe cylindrique de courant (identiques) :



Observations :

1. Objet placé dans le milieu (B plus fort) - pas de force (champ uniforme ou équilibre instable)
2. La force est plus forte près des bouts ( $\nabla B$  plus grand)
3. Trois types de réaction :
  - répulsion (eau, cuivre, diamant ... **diamagnétiques**)
  - attraction (sodium, aluminium, oxygène liquide ... **paramagnétiques**)
  - forte attraction :  $10^4$  fois plus forte (fer, magnétite - **ferromagnétiques**)
4. La direction ne dépend pas de la direction du courant
5.  $F \propto B$  pour les ferromagnétiques  
 $F \propto B^2$  pour les dia- et paramagnétiques

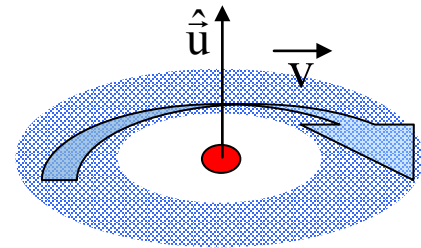


Explication :

1. Diamagnétisme – création de dipôles induits
2. Paramagnétisme – réorientation de dipôles existants
3. Ferromagnétisme – l'existence de grand nombre de dipôles non-compensés

Les électrons dans les atomes et les molécules – comme boucle de courant

$$\vec{m} = I\vec{S} = -\frac{ev}{2\pi R}\pi R^2\hat{u} = -\frac{evR}{2}\hat{u}$$



moment orbital :

$$\vec{L} = m_e v r \hat{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$$

$-\frac{e}{2m_e}$  - facteur gyromagnétique (magnétomécanique) orbital

L'électron possède un autre moment cinétique – le **spin**

$$\vec{L}_{\text{spin}} = \frac{h}{4\pi} \quad \text{ou } h \text{ est la constante de Planck.}$$

Le moment magnétique associé :

$$\vec{m}_{\text{spin}} = -\frac{e}{m_e} \vec{L}_{\text{spin}} = -\frac{eh}{4\pi m_e} \quad (\text{le facteur gyromagnétique est 2 fois plus grand})$$

Dans le champ magnétique externe  $B$  le spin et le moment orbital magnétique doivent s'orienter dans la direction de  $B$  (dipôles magnétiques). Ça va créer une force d'attraction – **paramagnétisme**.

L'agitation thermique et les forces moléculaires tendent de désorienter le rangement d'une façon chaotique. Le résultat est que le champ magnétique induit est proportionnel au  $B$  et inversement proportionnel à la température  $T$ .

Mais les lois de la mécanique quantique exigent que les électrons sont groupés par paires, avec le spin et le moment orbital dans chaque paire en direction opposés. Ça annule complètement l'effet paramagnétique dans les molécules qui regroupent des électrons par paires.

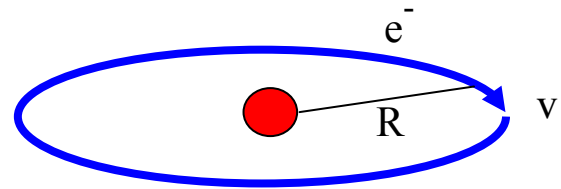
Quelques molécules seulement contiennent un nombre **d'électrons impairs**.

Quelques atomes (e.g. fer) contiennent électrons **avec spin non apparié**.

Les conducteurs ayant les **électrons libres** ont un comportement paramagnétique.

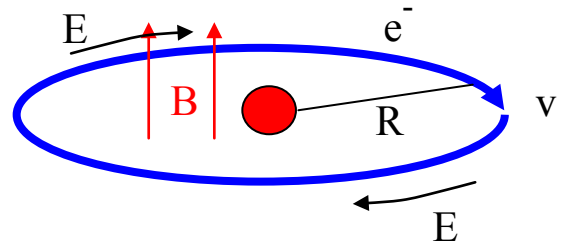
Et le **diamagnétisme** ?

Un électron pour  $B_{\text{externe}} = 0$  :



Augmentation du champ magnétique  $B$  doit créer un champ électrique (l'induction de Faraday) :

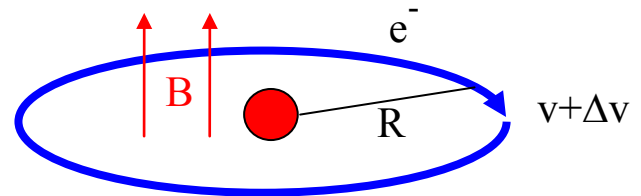
$$\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi R E = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}.$$



$E$  doit accélérer la charge :

$$m_e \frac{dv}{dt} = -eE = \frac{eR}{2} \frac{dB}{dt}$$

$$\Delta v = \frac{eR}{2m_e} \Delta B$$



Les vitesses des électrons vont changer :  $\pm v \rightarrow \pm v + \Delta v$ . Ça va être équivalent à un changement de la vitesse angulaire

$$\Delta \omega = \frac{\Delta v}{R} = \frac{e}{2m_e} B \quad (\text{appelée fréquence de Larmor}).$$

Le changement de moment dipolaire magnétique :

$$\Delta \vec{m} = \frac{-eR}{2} \Delta v = -\frac{e^2 R^2}{2m_e} \Delta \vec{B}$$

est dans la direction opposée au changement de  $B$ , indépendamment du signe de charge et de la direction de rotation (loi de Lenz).

Donc, aussi pour les électrons appairés le champ uniforme externe  $B$  va créer un moment magnétique opposé au  $B$  (et proportionnel au  $B$ ). Ça va créer une force de répulsion – le **diamagnétisme**.

Question : la vitesse a changé, le rayon non – qu'est-ce qu'il se passe avec l'équilibre des forces ?

Sans B : 
$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{m_e v^2}{R}$$

Avec B : 
$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} + e(v + \Delta v)B \stackrel{?}{=} \frac{m_e (v + \Delta v)^2}{R}$$

En négligeant  $(\Delta v)^2$

$$\Delta v = \frac{eR}{2m_e} B$$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} + e v \frac{2m_e}{eR} \Delta v \approx \frac{m_e v^2}{R} + 2 \frac{m_e v \Delta v}{R} \quad \text{OK}$$

## Le ferromagnétisme :

Paramagnétisme extrême : les calculs très simples à partir des mesures de la magnitude d'effet et l'équation

$$\Delta \vec{m} = \frac{-eR}{2} \Delta v = -\frac{e^2 R^2}{2m_e} \Delta \vec{B}$$

montre que le ferromagnétisme inclue entre 1 et 2 électrons par atome. En fait, ces sont les effets quantiques : certains états de matériaux ferromagnétiques sont plus probables (l'énergie plus bas) si tous les spins et moments magnétiques d'électrons non appairés sont alignés – alignement spontané.

Les domaines macroscopiques (les dimensions dépendent de la température) ont le moment magnétique non nul. Ces domaines sont alignés facilement en parallèle au champ magnétique externe.

## Champ H, susceptibilité et perméabilité magnétique

Le moment magnétique total par unité de volume :

$\vec{M}$  – polarisation magnétique ou aimantation

Par analogie avec le champ électrique ( $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$ ) on peut introduire la susceptibilité magnétique  $\chi_m$  :  $\vec{M} = \chi_m \vec{B}$ , mais habituellement on utilise un autre vecteur  $\vec{H}$  :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \text{ - champ H, ou champ magnétique ;}$$

$\vec{B}$  – induction magnétique

Pourquoi ?

A l'extérieur d'un milieu magnétique  $\vec{H} \sim \vec{B}$ . A l'intérieur,  $\vec{H}$  exprime le champ magnétique créé par les courants libres et par les sources externes, hors des sources magnétiques internes, créées par les courants liés :

$$\vec{J}_{\text{total}} = \vec{J}_{\text{liés}} + \vec{J}_{\text{libres}}, \quad \text{rot} \vec{M} = \vec{J}_{\text{liés}} \Rightarrow \text{rot} \vec{H} = \vec{J}_{\text{libres}}$$

En fait, dans l'expérience physique, on s'intéresse au champ créé par les courants libres, qui sont variés et mesurés.

Dans les cas statiques l'analogie avec  $\vec{E}$  est plus prononcée pour  $\vec{H}$  que pour  $\vec{B}$  :

$$\text{rot} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \text{rot} \vec{H} = \vec{J}_{\text{libres}} = 0 \text{ sans courants libres même pour les milieux magnétisés et non-magnétisés.}$$

$$\text{div} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \text{div} \vec{H} = -\text{div} \vec{M} \begin{cases} = 0 & \text{Sans aimantation} \\ \neq 0 & \text{Avec aimantation} \\ & \text{('charges' magnétique)} \end{cases}$$

Par analogie avec  $E$ , ou le vecteur de polarisation de milieu  $P = \chi_e E$  :

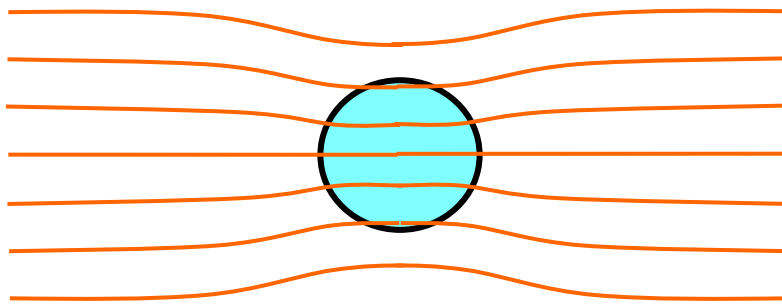
susceptibilité magnétique  $\chi_m$  :  $M = \chi_m H$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} \text{ avec}$$

$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$  - perméabilité magnétique

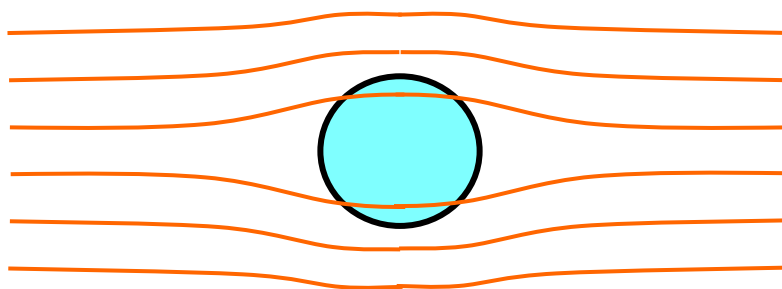
Paramagnétiques :  $\mu > \mu_0$  (pour les diélectriques toujours  $\epsilon \geq \epsilon_0$ )

Dans un champ externe uniforme les lignes du champ sont attirées :



Diamagnétiques :  $\mu < \mu_0$

Dans un champ externe uniforme les lignes du champ sont repoussées :



### ***Monographies :***

- 1) E. Loewen and E. Popov: *Diffraction Gratings and Applications*, (Marcel Dekker, New York, 1997)
- 2) M. Nevière, E. Popov, R. Reinisch, and V. Vitrant: *Electromagnetic Resonances in Nonlinear Optics*, (Gordon and Breach, 2000)
- 3) M. Nevière and E. Popov: *Light Propagation in Periodic Media: Diffraction Theory and Design*, (Marcel Dekker, New York, 2003)
- 4) E. Popov, editor: *Gratings: Theory and Numeric Applications* (Institut Fresnel, CNRS, AMU, 2012) [www.fresnel.fr/numerical-grating-book](http://www.fresnel.fr/numerical-grating-book)

### ***Chapitres :***

- 5) E. Popov: "Light Diffraction by Relief Gratings: Macro and Microscopic Point of View," in *Progress in Optics* by E. Wolf, ed. (Elsevier, 1993), ch.2, 139-187.
- 6) E. Popov and N. Bonod: "Physics of extraordinary transmission through hole arrays," in *Structured Surfaces as Optical Metamaterials*, ed. A. Maradudin (Cambridge Press, 2011), ch.1, 1-27
- 7) E. Popov: "Introduction to diffraction gratings: summary of applications," in *Gratings: Theory and Numeric Applications*, ed. E. Popov (Institut Fresnel, CNRS, AMU, 2012), Ch.1, 1.1-1.23
- 8) D. Maystre and E. Popov: "Integral method for gratings," in *Gratings: Theory and Numeric Applications*, ed. E. Popov (Institut Fresnel, CNRS, AMU, 2012), Ch.4, 4.1-4.58
- 9) E. Popov: "Differential method for periodic media," in *Gratings: Theory and Numeric Applications*, ed. E. Popov (Institut Fresnel, CNRS, AMU, 2012), Ch.7, 7.1-7.56

### ***Ouvrages pédagogiques :***

- 10) E. Popov : *Electrostatique et magnétostatique : notes du cours* (Univ. de Provence, Marseille, 2000)

### ***Publications dans des revues internationales avec comité de lecture :***

- 11) L. L. Konstantinov, I. Z. Kostadinov and E. K. Popov: "Photoelectricity of AgI Under SubBandgap Illumination," *Sol. St. Ionics* **8**, 127 (1983)
- 12) L. Mashev and E. Popov: "Diffraction efficiency anomalies of multilayer dielectric grating," *Opt. Commun.* **51**, 131 (1984)
- 13) L. Mashev, S. Tonchev and E. Popov: "Two Dimensional Grating Beam Splitter and Polarizer," *Bulg. J. Phys.* **12**, 297 (1985)
- 14) E. Popov and L. Mashev: "Dispersion Characteristics of Multilayered Waveguides," *Opt. Commun.* **52**, 393 (1985)
- 15) L. Mashev and E. Popov: "Zero Order Anomaly of Dielectric Coated Grating," *Opt. Commun.* **55**, 377 (1985)



- 16) E. Popov and L. Mashev: "Analysis of Mode Coupling in Planar Optical Waveguides," *Opt. Acta* **32**, 265 (1985)
- 17) E. Popov and L. Mashev: "The Determination of Mode Coupling Coefficients," *Opt. Acta* **32**, 635 (1985)
- 18) E. Popov and L. Mashev: "Convergence of Rayleigh Fourier Method and Rigorous Differential Method for Relief Diffraction Gratings," *Opt. Acta* **33**, 593 (1986)
- 19) E. Popov, L. Mashev and D. Maystre: "Theoretical Study of the Anomalies of Coated Dielectric Gratings," *Opt. Acta* **33**, 607 (1986)
- 20) E. Popov and L. Mashev: "Conical Diffraction Mounting: Generalization of a Rigorous Differential Method," *J. Optics* **17**, 175 (1986)
- 21) E. Popov and L. Mashev: "Diffraction Anomalies of Coated Dielectric Gratings in Conical Diffraction Mounting," *Opt. Commun.* **59**, 323 (1986)
- 22) E. Popov and L. Mashev: "Rigorous Electromagnetic Treatment of Planar Corrugated Waveguides," *J. Opt. Commun.* **7**, 127 (1986)
- 23) G. A. Golubenko, A. S. Svakhin, V. A. Sychugov, A. V. Tischenko, E. Popov and L. Mashev: "Diffraction Characteristics of Planar Corrugated Waveguides," *J. Opt. Quant. Electr.* **18**, 123 (1986)
- 24) E. Popov and L. Mashev: "Convergence of Rayleigh Fourier method and rigorous differential method for relief diffraction gratings nonsinusoidal profile," *J. Mod. Opt.* **34**, 155 (1987)
- 25) L. Mashev and E. Popov: "Reflection gratings in conical diffraction mounting," *J. Opt. (Paris)* **18**, 3 (1987)
- 26) E. Popov and L. Mashev: "Diffraction from planar corrugated waveguides at normal incidence," *Opt. Commun.* **61**, 176 (1987)
- 27) L. Mashev and E. Popov: "Phenomenological approach to the resonance anomalies in relief diffraction gratings," *Bulg. J. Phys.* **14**, 342 (1987)
- 28) L. Mashev and E. Popov: "Numerical Optimization of holographic diffraction grating efficiency," *Bulg. J. Phys.* **14**, 549 (1987)
- 29) L. B. Mashev, E. K. Popov and E. G. Loewen: "Asymmetrical trapezoidal grating efficiency," *Appl. Opt.* **26**, 2864 (1988)
- 30) L. B. Mashev, E. K. Popov and E. G. Loewen: "Total absorption of light by a sinusoidal grating near grazing incidence," *Appl. Opt.* **27**, 152 (1988)
- 31) L. B. Mashev, E. K. Popov and E. G. Loewen: "Optimization of the grating efficiency in grazing incidence," *Appl. Opt.* **26**, 4738 (1987)
- 32) E. Popov, L. Mashev and D. Maystre: "Backside diffraction by relief gratings," *Opt. Commun.* **65**, 97 (1988)
- 33) L. Mashev, E. Popov and D. Maystre: "'Antiblazing' effect in gratings," *Opt. Commun.* **67**, 5, 321 (1988)
- 34) I. Savatinova, S. Tonchev, E. Popov and L. Mashev: "Electrically induced strip waveguide modes," *Opt. Commun.* **67**, 4, 261 (1988)
- 35) E. Popov and L. Tsonev: "Electromagnetic field enhancement in deep metallic gratings," *Opt. Commun.* **69**, 193 (1989)

- 36) E. Popov: "Total absorption of light in metallic gratings: a comparative analysis of spectral dependence for shallow and deep grooves," *J. Mod. Opt.* **36**, 5, 669-674 (1989)
- 37) L. Mashev, E. Popov and E. Loewen: "Brewster effect for deep metallic gratings," *Appl. Opt.* **28**, 2538-2541 (1989)
- 38) E. Popov, L. Mashev and E. Loewen: "Total absorption of light by metallic grating in grazing incidence a connection in the complex plane with other anomalies," *Appl. Opt.* **28**, 5, 970-975 (1989)
- 39) L. Mashev and E. Popov: "Anomalies in metallic diffraction gratings," *J. Opt. Soc. Am.* **6**, 10, 1561-1567 (1989)
- 40) E. Popov: "Plasmon interactions in metallic gratings:  $\omega$  and  $k$  minigaps and their connection with poles and zeros," *Surf. Sci.* **222**, 517-529 (1989)
- 41) E. Popov, L. Tsonev, and D. Maystre: "Gratings - general properties in Littrow mount and energy flow distribution," *J. Mod. Opt.* **37**, 3, 367-377 (1990)
- 42) E. Popov, L. Tsonev, and D. Maystre: "Losses of plasmon surface wave on metallic grating," *J. Mod. Opt.* **37**, 3, 379-387 (1990)
- 43) E. Popov and L. Tsonev: "Total absorption of light by metallic gratings and energy flow distribution," *Surf. Sci.* **230**, 290-294 (1990)
- 44) E. Popov, L. Tsonev, E. Loewen and E. Alipieva: "Spectral behavior of anomalies in deep metallic gratings," *J. Opt. Soc. Am. A* **7**, 1730-1735 (1990)
- 45) E. Loewen, E. Popov, L. Tsonev and J. Hoose: "Experimental study of local and integral efficiency behavior of a concave holographic diffraction grating," *J. Opt. Soc. Am. A* **7**, 1764-1769 (1990)
- 46) E. Popov, L. Tsonev, and E. Loewen: "Scalar theory of relief transmission gratings," *Opt. Commun.* **80**, 307-311 (1991)
- 47) L. Tsonev and E. Popov: "Focal images from a concave holographic grating: A corroborative investigation using three different techniques," *J. Mod. Opt.* **39**, 1749-1760 (1992)
- 48) L. Tsonev, E. Popov, J. Hoose and M. Sabeva: "Concave holographic grating optimization of diffraction efficiency," *Appl. Opt.* **31**, 5317-5319 (1992)
- 49) I. Savatinova, S. Tonchev, E. Popov, E. Liarokapis and S. Raptis: "Raman Scattering of H:LiNbO waveguides," *J. Phys. D* **25**, 106-112 (1992)
- 50) E. Popov and L. Tsonev: "Anomalous light absorption by lamellar metallic gratings," *Surf. Sci. Lett.* **271**, L378- L382 (1992)
- 51) E. Popov, L. Tsonev and M. Sabeva: "Some technological problems in holographic recording of plane gratings," *Opt. Engineering* **31**, 2168-2173 (1992)
- 52) L. Tsonev and E. Popov: "Focal spot estimation for concave diffraction gratings," *Opt. Commun.* **90**, 1115 (1992)
- 53) M. Nevière and E. Popov: "Analysis of dielectric gratings of arbitrary profiles and thicknesses: A comment," *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 2095-2096 (1992)
- 54) E. Popov, L. Tsonev, and D. Maystre: "Lamellar diffraction grating anomalies," *Appl. Opt.* **33**, 5214-5219 (1994)

- 55) M. Sabeva, E. Popov, and L. Tsonev: "Reflection gratings in the visible region: efficiency in non-polarized light," *Opt. Commun.* **100**, 39-42 (1993)
- 56) E. Popov: "Light diffraction by relief metallic gratings," *Opt. Quant. Electr.* **93**, 63-64 (1993)
- 57) E. Popov, L. Tsonev, and D. Maystre: "Gratings - general properties in Littrow mount and energy flow distribution," in *Selected Papers on Diffraction Gratings*, ed. D. Maystre, SPIE Milestone Series, v. MS **83**, 585-593 (1993)
- 58) E. G. Loewen, L. B. Mashev and E. K. Popov: "Transmission gratings as 3way beam splitters," in *Selected Papers on Diffraction Gratings*, ed. D. Maystre, SPIE Milestone Series, v. MS **83**, 683-687 (1993)
- 59) E. Popov and M. Nevière: "Surface-enhanced second harmonic generation in nonlinear corrugated dielectrics: New theoretical approaches," *J. Opt. Soc. B* **11**, 1555-1564 (1994)
- 60) R. Reinisch, E. Popov, M. Nevière, J. L. Coutaz, and J. F. Roux: "Nonlinear zeros in second harmonic generation at grating couplers," *Opt. Lett.* **20**, 347-349 (1995)
- 61) E. Popov, M. Nevière, R. Reinisch, J. L. Coutaz, and J. F. Roux: "Grating enhanced second harmonic generation in polymer waveguides - role of losses," *Appl. Opt.* **34**, 3398-3405 (1995)
- 62) M. Saillard, E. Popov, L. Tsonev, L. Scandella, and N. Kruse: "Light diffraction from rough gratings," *Appl. Opt.* **34**, 4883-4891 (1995)
- 63) M. Nevière, E. Popov, and R. Reinisch: "Electromagnetic resonances in linear and nonlinear optics: phenomenological study of grating behavior through the poles and zeros of the scattering operator," *J. Opt. Soc. Am. A* **12**, 513-523 (1995)
- 64) R. Reinisch, M. Nevière, E. Popov, and H. Akhouayri: "Coupled-mode formalism and linear theory of diffraction for a simplified analysis of second harmonic generation at grating couplers," *Opt. Commun.* **112**, 339-348 (1994)
- 65) E. Loewen, D. Maystre, E. Popov, and L. Tsonev: "Echelles - scalar, electromagnetic and real groove properties," *Appl. Opt.* **34**, 1707-1727 (1995)
- 66) R. Reinisch, E. Popov, and M. Nevière: "Second harmonic generation induced optical bistability in prism or grating couplers," *Opt. Lett.* **20**, 854-856 (1995)
- 67) G. Blau, E. Popov, F. Kajzar, A. Raimond, J. F. Roux, and J. Coutaz: "Grating-assisted phase-matched second harmonic generation from a polymer waveguides," *Opt. Lett.* **20**, 1101-1103 (1995)
- 68) E. Popov, B. Bozkov, M. Sabeva, and D. Maystre: "Blazed holographic grating efficiency - numerical comparison with different profiles," *Opt. Commun.* **117**, 413-416 (1995)
- 69) E. Popov, M. Nevière, G. Blau, and R. Reinisch: "Numerical optimization of grating-enhanced second-harmonic generation in optical waveguides," *J. Opt. Soc. Am. B* **12**, 2390-2397 (1995)
- 70) L. Kancheva, E. Popov, and G. Georgiev: "On the population loss dynamics of a strongly excited four-level system," *J. Mod. Opt.* **42**, 411-423 (1995)
- 71) R. Reinisch, M. Nevière, and E. Popov: "Phase-matched guided wave optical bistability in  $\chi(2)$  optical resonator," *Opt. Lett.* **20**, 2472-2474 (1995)

- 72) E. Popov, B. Bozhkov, and M. Nevière: "The inverted surface plasmon resonance: phenomenological explanation," *J. Mod. Opt.* **43**, 1101-1110 (1996)
- 73) E. Popov, E. Loewen, and M. Nevière: "Transmission gratings for beam supplying and beam splitting," *Appl. Opt.* **35**, 3072-3075 (1996)
- 74) E. Loewen, D. Maystre, E. Popov, and L. Tsonev: "Diffraction efficiency of echelles working in extremely high orders," *Appl. Opt.* **35**, 1700-1704 (1996)
- 75) M. Nevière and E. Popov: "Grating electromagnetic theory 'User guide,'" *J. Imaging Sci. Technol.* **41**, 315-323 (1997)
- 76) M. Nevière and E. Popov: "New theoretical method for electromagnetic wave diffraction by a metallic or dielectric cylinder, bare or coated with a thin dielectric layer," *J. Electromag. Waves Appl.* **12**, 1265-1296 (1998)
- 77) E. Popov, B. Bozhkov, D. Maystre, and J. Hoose: "Integral method for echelles covered with lossless or absorbing thin dielectric layers," *Appl. Opt.* **38**, 47-55 (1999)
- 78) M. Nevière, E. Popov, B. Bozhkov, L. Tsonev, and S. Tonchev: "High-accuracy translation-rotation encoder with two gratings in Littrow mount," *Appl. Opt.* **38**, 67-76 (1999)
- 79) S.A. Darmanyan, E. Popov, and M. Nevière: "Nonlinear prism coupler: approximate theory and comparison with rigorous analysis," *J. Electromag. Waves Appl.* **14**, 383-399 (2000)
- 80) E. Popov and M. Nevière: "Differential theory for diffraction gratings: a new formulation for TM polarization with rapid convergence," *Opt. Lett.* **25**, 598 (2000)
- 81) E. Popov and M. Nevière: "Grating theory: new equations in Fourier space leading to fast converging results for TM polarization," *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 1773-1784 (2000)
- 82) E. Popov, M. Nevière, S. Enoch, and R. Reinisch: "Theory of light transmission through subwavelength periodic hole arrays," *Phys. Rev. B*, **62**, 16100-16108 (2000)
- 83) E. Popov and B. Bozhkov: "Differential method applied for photonic crystals," *Appl. Opt.* **39**, 4926 (2000)
- 84) E. Popov, B. Bozhkov, and M. Nevière: "Almost perfect blazing by photonic crystal rod grating," *Appl. Opt.* **40**, 2417-2422 (2001)
- 85) B. Bozhkov, M. Nevière, and E. Popov: "Differential method as applied to multilayered structures with arbitrary refractive index profiles and having linear or nonlinear optical properties," *Bulg. J. Phys.* **29**, 1-6 (2002)
- 86) E. Popov and B. Bozhkov: "Corrugated waveguides as resonance optical filters – advantages and limitations," *J. Opt. Soc. Am. A* **18**, 1758-1764 (2001).
- 87) G. Zartov, T. Tenev, K. Panajotov, E. Popov, R. Peyeva, H. Thienpont, and I. Veretennicoff: "Photorefractive beam-fanning effect and self-pulsation in coated LiNbO<sub>3</sub> slabs," *J. Opt. Soc. Am. A* **18**, 1741-1747 (2001)
- 88) L. Mashev and E. Popov: "Zero order anomaly of dielectric coated gratings," *SPIE Milestone Series on Subwavelength Diffractive Optics*, J. Mait and Dennis Prather, eds. (Bellingham, 2001), v. Ms166, pp.571-574 (2001).
- 89) E. Popov and M. Nevière: "Maxwell equations in Fourier space: fast converging formulation for diffraction by arbitrary shaped, periodic, anisotropic media," *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, 2886-2894 (2001)

- 90) B. Chernov, M.Nevière, and E.Popov: "Fast Fourier factorization method applied to modal analysis of slanted lamellar diffraction gratings in conical mountings," *Opt. Comm.* **194**, 289-297 (2001)
- 91) E.Popov, M.Nevière, B. Gralak, and G. Tayeb: "Staircase approximation validity for arbitrary shaped gratings," *J. Opt. Soc. Am. A.* **19**, 33-42 (2002)
- 92) S. Enoch, E.Popov, M.Nevière, and R. Reinisch: "Enhanced light transmission by hole arrays," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **4**, S83-S87 (2002)
- 93) R.Reinisch, M.Nevière, G.Tayeb, and E.Popov: "Symmetry relations for reflection and transmission coefficients of magneto-optic systems," *Opt. Commun.* **205**, 59-70 (2002)
- 94) N.Bonod, L.Li, S.Enoch, M.Nevière, and E.Popov: "Resonant optical transmission through thin metallic films with and without holes," *Opt. Expr.* **11**, 482-490 (2003)
- 95) E.Popov , M.Nevière, and N.Bonod: "Differential Theory of Diffraction by 2D-Periodic Objects," *Trends in Opt. Photon. Ser.* **75**, 351-358 (2002)
- 96) B. Gralak, G. Tayeb, S. Enoch, and E.Popov: "Color rendering techniques applied to the study of butterflies wings," *Trends in Opt. Photon. Ser.* **75**, 407-409 (2002)
- 97) N. Bonod, R. Reinisch, E. Popov, and M. Nevière, "Optimization of surface-plasmon-enhanced magneto-optical effects," *J. Opt. Soc. Am. B* **21**, 791-797 (2004)
- 98) E. Popov, M. Nevière, and N. Bonod: "Factorization of products of discontinuous functions applied to Fourier-Bessel basis," *J. Opt. Soc. Am. A*, **21**, 46-51 (2004)
- 99) E. Popov, B. Chernov, M. Nevière, N. Bonod: "Differential theory: application to highly conducting gratings," *J. Opt. Soc. Am. A*, **21**, 199-206 (2004)
- 100) E. Popov, J. Hoose, B. Frankel, C. Keast, M. Fritze, T.Y. Fan, D. Yost, and S. Rabe: "Diffraction-grating based wavelength demultiplexer," *Opt. Expr.* **12**, 269-275 (2004)
- 101) E. Popov, S. Enoch, G. Tayeb, M. Nevière, B. Gralak, N. Bonod , "Enhanced transmission due to non-plasmon resonances in one and two dimensional gratings," *Appl.Opt.* **43**, 999-1008 (2004)
- 102) P. Boyer, E. Popov, M. Nevière, G. Tayeb: "Diffraction theory in TM-polarization: Application of the Fast Fourier Factorization method to cylindrical devices with arbitrary cross section," *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 2146-2153 (2004)
- 103) N. Bonod, E. Popov, M. Neviere: "Differential theory of diffraction by finite cylindrical objects," *J. Opt. Soc. Am. A* **22**, 481-490 (2005)
- 104) N. Bonod, E. Popov, M. Neviere: "Fourier factorization of nonlinear Maxwell equations in periodic media: application to the optical Kerr effect," *Opt. Commun.* **244**, 389-398 (2005)
- 105) N. Bonod, E. Popov, M. Neviere: "Light transmission through a subwavelength microstructured aperture: electromagnetic theory and applications," *Opt. Commun.* **245**, 355-361 (2005)
- 106) E. Popov, N. Bonod, M. Neviere, H. Rigneault, P.-F. Lenne, P. Chaumet, "Surface plasmon excitation on a single subwavelength hole in a metallic sheet," *Appl. Opt.* **44**, 2332-2337 (2005)
- 107) H. Rigneault, J. Capoulade, J. Dintinger, J. Wenger, N. Bonod, E. Popov, T. Ebbesen, P.F. Lenne, "Enhancement of single molecules at high concentrations in subwavelength apertures," *Phys. Rev. Lett.* **95**, 117401 (2005)

- 108) S. Enoch, E. Popov, and N. Bonod, "Analysis of the physical origin of surface modes on finite-size photonic crystals," *Phys. Rev. B* **72**, 155101-(1-7) (2005)
- 109) P. Boyer, E. Popov, M. Nevère, and G. Renversez: "Diffraction theory: application of the fast Fourier factorization to cylindrical devices with arbitrary cross section lighted in conical mounting," *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 1146-1158 (2006)
- 110) B. Stout, M. Nevère, and E. Popov, "Light diffraction by a three-dimensional object: Differential theory," *J. Opt. Soc. Am. A* **22**, 2385-2404 (2005)
- 111) E. Popov, M. Nevère, A.-L. Fehrembach, and N. Bonod: "Optimization of plasmon excitation at structured apertures," *Appl. Opt.* **44**, 6141-6154 (2005)
- 112) E. Popov, M. Nevère, P. Boyer, and N. Bonod: "Transmission through single apertures," *Opt. Commun.* **255**, 338-348 (2005)
- 113) J. Wenger, P.-F. Lenne, E. Popov, and H. Rigneault: "Single molecule fluorescence in rectangular nano-apertures," *Opt. Express* **13**, 7035-7044 (2005)
- 114) E. Popov, M. Nevère, A.-L. Fehrembach, and N. Bonod: "Enhanced transmission of light through a circular structured aperture," *Appl. Opt.* **44**, 6898-6904 (2005)
- 115) E. Popov and S. Enoch: "Photonic crystal surface modes narrow-band filtering," *Opt. Express* **13**, 5783-5790 (2005)
- 116) B. Stout, M. Nevère, and E. Popov: "Mie scattering by an anisotropic object. Part I: Homogeneous sphere," *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 1111-1123 (2006)
- 117) B. Stout, M. Nevère, and E. Popov: "Mie scattering by an anisotropic object. Part II: Arbitrary-shaped object – differential theory," *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 1124-1134 (2006)
- 118) J.-J. Bonnefois, G. Guilda, M. Nevère, and E. Popov, "Simulation of two-dimensional Kerr photonic crystals via the fast Fourier factorisation," *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 842-847 (2006)
- 119) M. Nevère, E. Popov, and P. Boyer, "Diffraction theory of an anisotropic circular cylinder," *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 1731-1740 (2006)
- 120) E. Popov, M. Nevère, J. Wenger, P.-F. Lenne, H. Rigneault, P. Chaumet, N. Bonod, J. Dintinger, and T. Ebbesen: "Field enhancement in single subwavelength apertures," *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 2342-2348 (2006)
- 121) J. Wenger, P.-F. Lenne, E. Popov, J. Capoulade, H. Rigneault, J. Dintinger, T. W. Ebbesen, N. Bonod, "Nanopuits métalliques pour exalter les contrastes en microscopie optique", *Photoniques* **23**, 44-45 (mai-juin 2006)
- 122) P. Boyer, E. Popov, G. Renversez, and M. Nevère, "A new differential method applied to the study of arbitrary cross section microstructured optical fibers," *Opt. Quant. Electron.* **38**, 217-230 (2006)
- 123) J. Wenger, J. Dintinger, N. Bonod, E. Popov, P.-F. Lenne, T. Ebbesen, and H. Rigneault, "Raman scattering and fluorescence emission in a single nanoaperture: Optimizing the local intensity enhancement," *Opt. Commun.* **267**, 224-228 (2006)
- 124) E. Popov and M. Nevère, "Analytical model of the optical response of periodically structured metallic films: Comment," *Opt. Express* **14**, 6583-6585 (2006)
- 125) N. Bonod, E. Popov, S. Enoch, and J. Néauport, "Polarization insensitive blazed diffraction gratings," *J. Europ. Opt. Soc. RP*, **1**, 06029-1-8 (2006)

- 126) E. Popov, S. Enoch, M. Nevière, "Plasmon surface waves and complex-type surface waves: comparative analysis on single interfaces, lamellar gratings, and 2-dimensional hole arrays," *Appl. Opt.* **46**, 154-160 (2007)
- 127) E. Popov, M. Nevière, A. Sentennac, N. Bonod, A.-L. Ferrenbach, J. Wenger, P.-F. Lenne, H. Rigneault, "Single-scattering theory of light diffraction by a circular subwavelength aperture in a finitely conducting screen," *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 339-358 (2007)
- 128) B. Stout, M. Nevière, and E. Popov, "*T*-matrix of the homogeneous anisotropic sphere: applications to orientation averaged resonant scattering," *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 1120-1130 (2007)
- 129) E. Popov, N. Bonod, and S. Enoch, "Comparison of plasmon surface wave on shallow and deep 1D and 2D gratings," *Opt. Express* **15**, 4224-4237 (2007)
- 130) E. Popov, N. Bonod, and St. Enoch, "Non-Bloch plasmonic stop-band in real-metal gratings," *Opt. Express* **15**, 6241-6250 (2007)
- 131) J. Wenger, B. Cluzel, J. Dintinger, N. Bonod, A.-L. Fehrembach, E. Popov, P.-F. Lenne, T. W. Ebbesen, and H Rigneault, "Radiative and Nonradiative Photokinetics Alteration Inside a Single Metallic Nanometric Aperture," *J. Phys. Chem. C*, **111**, 30, 11469-11474 (2007)
- 132) Ph. Boyer, G. Renversez, E. Popov, and M. Nevère, "Improved differential method for microstructured optical fibers," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **9**, 728-740 (2007)
- 133) E. Popov and N. Bonod, "Differential theory of diffraction in cylindrical coordinates," *phys. stat. sol. (b)* **244**, 3463-3478 (2007)
- 134) N. Bonod, E. Popov, L. Li, and B. Chernov, "Unidirectional excitation of surface plasmons by slanted gratings," *Opt. Express* **15**, 11427-11432 (2007)
- 135) E. Popov and St. Enoch, "Mystery of the double limit in homogenisation of finitely or perfectly conducting periodic structures," *Opt. Lett.* **32**, 3441-3444 (2007)
- 136) A.-L. Fehrenbach, E. Popov, G. Tayeb, and D. Maystre, "Narrow-band filtering with whispering modes in gratings made of fibers," *Opt. Express* **15**, 15734-15740 (2007)
- 137) D. Gérard, J. Wenger, N. Bonod, E. Popov, H. Rigneault, F. Mahdavi, and S. Blair, "Nanoaperture-enhanced fluorescence: Towards higher detection rates with plasmonic metals," *Phys. Rev. B* **77**, 045413, 1-8 (2008)
- 138) N. Bonod, E. Popov, D. Gérard, J. Wenger, and H. Rigneault, "Field enhancement in a circular aperture surrounded by a single channel groove," *Opt. Express* **16**, 2276-2287 (2008)
- 139) J. Wenger, D. Gérard, J. Dintinger, O. Mahboub, N. Bonod, E. Popov, T. W. Ebbesen, and H. Rigneault, "Emission and excitation contributions to enhanced single molecule fluorescence by gold nanometric apertures," *Opt. Express* **16**, 3008-3020 (2008)
- 140) P. Ferrand, J. Wenger, A. Devilez, M. Pianta, B. Stout, N. Bonod, E. Popov, and H. Rigneault, "Direct imaging of photonic nanojets," *Opt. Express* **16**, 6930-6940 (2008)
- 141) E. Popov, D. Maystre, R. C. McPhedran, M. Nevière, M. C. Hutley, and G. H. Derrick, "Total absorption of unpolarized light by crossed gratings," *Opt. Express* **16**, 6146-6155 (2008)

- 142) N. Bonod, E. Popov, and R. C. McPhedran, "Increased surface plasmon resonance sensitivity with the use of double Fourier harmonic gratings," *Opt. Express* **16**, 11691-11702 (2008)
  - 143) J. Hoose and E. Popov, "Two-dimensional gratings for low polarization dependent wavelength demultiplexing," *Appl. Opt.* **47**, 4574 – 4578 (2008)
  - 144) A. Devilez, B. Stout, N. Bonod, and E. Popov, "Spectral analysis of three-dimensional photonic jets," *Opt. Express* **16**, 14200-14212 (2008)
- publié aussi dans « The virtual Journal of Biomedical Optics », v.3, no.11
- 145) D. Gérard, J. Wenger, A. Devilez, D. Gachet, B. Stout, N. Bonod, E. Popov, and H. Rigneault, "Strong electromagnetic confinement near dielectric microspheres to enhance single-molecule fluorescence," *Opt. Express* **16**, 15297-15303 (2008),
- publié aussi dans « The virtual Journal of Biomedical Optics », v.3, no.11
- 146) N. Bonod, G. Tayeb, D. Maystre, S. Enoch, and E. Popov, "Total absorption of light by lamellar metallic gratings," *Opt. Express* **16**, 15431-15438 (2008)
  - 147) N. Bonod and E. Popov, "Total light absorption in a wide range of incidence by nanostructured metals without plasmons," *Opt. Lett.* **33**, 2287-2289 (2008)
  - 148) A. Devilez, N. Bonod, J. Wenger, D. Gérard, B. Stout, H. Rigneault, and E. Popov, "Three-dimensional subwavelength confinement of light with dielectric microspheres," *Opt. Express* **17**, 2089-2094 (2009)
  - 149) E. Popov, S. Enoch, and N. Bonod, "Absorption of light by extremely shallow metallic gratings: metamaterials behavior," *Opt. Express* **17**, 6770-6781 (2009)
  - 150) J. Wenger, D. Gerard, P.-F. Lenne, H. Rigneault, N. Bonod, E. Popov, D. Marguet, C. Nelep, T. Ebbesen, "Biophotonics applications of nanometric apertures," *Int. J. Materials and Product Technology*. **34**, 488-506 (2009)
  - 151) R. McPhedran, P. Chen, N. Bonod, and E. Popov, "Gratings and their quasistatic equivalents for high optical absorptance," *Phys. Rev. A* **79**, 053850, 1-11 (2009)
  - 152) D. Gerard, A. Devilez, H. Aouani, B. Stout, N. Bonod, J. Wenger, E. Popov, and H. Rigneault, "Efficient excitation and collection of single molecule fluorescence close to a dielectric microsphere," *J. Opt. Soc. Am. B*, **26**, 1473-1478 (2009)
- publié aussi dans « The virtual Journal of Biomedical Optics », v.4, no. 9
- 153) E. Popov, S. Enoch, and N. Bonod, "Metamaterial-induced band-gap of surface plasmon propagation," *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **11**, 114018 – 8pp (2009)
  - 154) E. Popov, D. Maystre, and G. Tayeb, "Whispering gallery modes and other cavity modes for perfect backscattering and blazing," *J. Opt. Soc. A* **27**, 1584-1592 (2010)
  - 155) H. Aouani, O. Mahboub, N. Bonod, E. Devaux, E. Popov, H. Rigneault, T. W. Ebbesen, and J. Wenger, "Bright Unidirectional Fluorescence Emission of Molecules in a Nanoaperture with Plasmonic Corrugations," *NanoLetters*, **11**, 637-644 (2011)
  - 156) D. Maystre, A.-L. Fehrembach, "Plasmonic antiresonance through subwavelength hole arrays," *J. Opt. Soc. Am. A* **28**, 342-355 (2011)
  - 157) A.-L. Fehrembach and E. Popov, "Comparative study of total absorption of light by two-dimensional channel and hole array gratings," *Opt. Express* **20**, 21702-21714 (2012)



- 158) D. Shu, E. Popov, and A.-L. Fehrembach, "Electro-optic effect in BaTiO<sub>3</sub> for spectral tuning of narrow-band resonances," J. Op. Soc. B 30, 1-10 (2013)

**Brevets :**

- 158) E. Popov and L. Mashev: "Method for selective reflectance," Bulgarian patent No 69561
- 159) L. Mashev, E. Popov, G. Zartov, R. Peeva and K. Panajotov: "Multilayered dielectric diffraction grating," Bulgarian patent No 64731
- 160) O. Pariaux, M. Nevière et E. Popov: "Dispositif optique de mesure interferometrique d'un déplacement relatif entre deux elements," European Patent No. EP 0 741 282 A2/30 April 1996
- 161) M. Nevière et E. Popov: "Dispositif optique de mesure interferometrique d'un déplacement relatif entre deux elements dont l'un au moins est mobile relativement a l'autre," brevet francais No. 9805729/6 May 1998
- 162) J. Hoose, R. Frankel, and E. Popov: "Diffraction structure for high-dispersion WDM application," US patent No 6,496,622 /17 December 2002
- 163) J. Hoose, R. Frankel, and E. Popov: "Lamellar grating structure with polarization-independent diffraction efficiency," US patent No. 6,724,533/20 April 2004
- 164) J. Hoose, R. Frankel, E. Popov, and M. Nevière: "Grating device with high diffraction efficiency," US patent No 6958859/25.10.2005
- 165) H. Rigneault, P.-F. Lenne, J. Wenger, E. Popov, T. Ebbesen, "Dispositif pour la détection exaltée de l'émission d'une particule cible", brevet CNRS, 2006

**Communications dans les conférences, publiées en texte complet :**

- 166) E. Popov and L. Mashev: "Multimode conversion in integrated optical devices," in *Optical Properties and Devices*, v.II (Bulgarian Physical Society, Sofia), 492-495 (1983)
- 167) L. Mashev and E. Popov: "Multilayer dielectric diffraction gratings," in *Optical Properties and Devices*, v.II (Bulgarian Physical Society, Sofia), 505-598 (1983)
- 168) L. Mashev, S. Tonchev and E. Popov: "Relief Holographic Diffraction Gratings," in *Optics'84*, v.II, (Bulgarian Physical Society, Sofia), 268-273 (1984)
- 169) L. Mashev and E. Popov: "Dispersion characteristics of multilayered waveguides," in *Optics'84*, v.II, (Bulgarian Physical Society, Sofia), 301-306 (1984)
- 170) E. Popov and L. Mashev: "Mode interactions in integrated optical devices," in *Physics and Electronics* 2, 492-495 (1984)
- 171) L. Mashev and E. Popov: "Multilayered dielectric relief gratings," in *Physics and Electronics* 2, 505-508 (1984)
- 172) E. Popov and L. Mashev: "Effect of guided wave excitation in coated dielectric gratings," ISSWAS (Novosibirsk) 2, 233-236 (1986)
- 173) L. Mashev and E. Popov: "Spectroscopic properties of relief holographic diffraction gratings," in Review on Atomic Spectroscopy (Sofia), p. 392-395 (1986)

- 174) E. G. Loewen, L. B. Mashev and E. K. Popov: "Transmission gratings as 3way beam splitters," SPIE v. **815**, 66-70 (1987)
- 175) M. Nevère, E. Popov, and R. Reinisch: "Enhanced and reduced second harmonic generation in nonlinear corrugated waveguides," Proc. URSI Symp., St. Petersburg'95, 547-549 (1995)
- 176) E. Loewen E. Popov, D. Maystre, and M. Nevère: "The golden mystery or why relative efficiency is not always what it seems," Milton Roy Techn. Report, Rochester'94, 1-11 (1994).
- 177) E. Loewen, D. Maystre, E. Popov and L. Tsonev: "New developments in the diffraction behavior of echelle gratings, " Milton Roy Techn. Report, Rochester'94, 12-15 (1994)
- 178) M. Nevère and E. Popov: "Surface-enhanced second-harmonic generation using gratings: phase-matching conditions," Tech. Digest CLEO Europe, 273-274 (1994)
- 179) E. Popov, R. Reinisch, and M. Nevère: "Electromagnetic resonance mediated second harmonic generation: peaks or dips?," Technical Digest SPIE Series **6**, 100-102 (1995)
- 180) R. Reinisch, E. Popov, and M. Nevère: "Optical bistability by cascading  $\chi^{(2)}$  in prism or grating couplers," Technical Digest SPIE Series **6**, 103-105 (1995)
- 181) M. Nevère, E. Popov, and R. Reinisch: "Electromagnetic study of second harmonic generation by a corrugated waveguides," SPIE Topical Meeting on Applications and Theory of Periodic Structures, San Diego, 9-14 July 1995, v. **2532**, pp. 340-347 (1995)
- 182) M. Nevère, E. Popov, and R. Reinisch: "Bistability of second harmonic generation with depletion of the pump field," SPIE **2532**, 329-339 (1995)
- 183) E. Popov, M. Nevère, and R. Reinisch: "Polymeric grating for frequency conversion - second and half harmonic generation," in *Photoactive Organic Materials*, eds. F. Kajar, V. Agranovich, and C. Lee, NATO ASI Series, v. **9**, 263-273 (Kluwer Academic, Dordrecht, 1996)
- 184) M. Rossi, C.G. Blough, D. Raguin, E. Popov, and D. Maystre: "Diffraction Efficiency of High-NA Continuous-Relief Diffractive Lenses," in *Diffractive Optics*, OSA Tech. Digest Series **6**, paper DTuD3 (1996)
- 185) M. Nevère, E. Popov, B. Bojtkov, L. Tsonev, S.Tonchev: "Interferometric translation-rotation encoder using diffraction gratings," in *Theory and Practice of Surface-Relief Diffraction Gratings: Synchrotron and Other Applications*, ed. W. McKinney and C. Palmer, SPIE **3450** , 46-54 (1998)
- 186) M. Nevère and E. Popov: "Electromagnetic theory of gratings review and potential applications," in *Theory and Practice of Surface-Relief Diffraction Gratings: Synchrotron and Other Applications*, ed. W. McKinney and C. Palmer, SPIE **3450** , 2-10 (1998)
- 187) M. Nevère and E. Popov: "Diffraction by a metallic cylinder coated by a thin absorbing layer – coordinate transformation formalism and applications," in *Electromagnetic Optics*, EOS **19**, 83-84 (1998)
- 188) M. Nevère, E. Popov, B. Bojtkov, L. Tsonev, S.Tonchev: "Interferometric translation-rotation encoder using diffraction gratings," Strassbourg'99, pp.1-5 (1999)
- 189) R. Reinisch, G. Vitrant, E. Popov, and M. Nevère: "Leaky modes in nonlinear optical resonators, " invited paper at NATO Advanced Research Workshop"Multiphoton and light driven multielectron processes in organics: materials, phenomena, applications"

Menton (France) August 26 - 31 (1999), publié dans : "*Multiphoton and light driven multielectron processes in organics: new phenomena, materials, applications*" Eds. F. Kajzar and M. V. Agranovich, NATO Science Series, Vol. 79, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2000.

- 190) E. Popov and M. Nevière: "Differential theory for diffraction gratings: new formulation for TM polarization with rapid convergence," Proc. Intern. Conf. On Optical Sciences and Applications for Sustainable Development, 10-14 April 2000, Dakar, pp.14a-c (2000).
- 191) E. Popov and B. Bozhkov: Corrugated waveguides as resonance optical filters used in limited beams," PIRS 2000, Cambridge MA (2000)
- 192) G. Zartov, T. Tenev, K. Panajotov, E. Popov, R. Peyeva, H. Thienpont, and I. Veretennicoff: "Self-pulsation and bistable switching in anisotropic photorefractive interference filters," PIRS 2000, Cambridge MA (2000)
- 193) S. Enoch, E. Popov, and M. Nevière: "3-D photonic crystals dispersion relation: improved convergence using fast Fourier factorization (FFF) method," Proc. SPIE 46<sup>th</sup> Annual Meeting, San Diego 2001, v.4438, 183-190 (2001)
- 194) E. Popov, M. Nevière, B. Gralak, and G. Tayeb: "The classical differential method, the rigorous coupled wave theory, and the modal method: comparative analysis of convergence properties in staircase approximation," Proc. SPIE 46<sup>th</sup> Annual Meeting, San Diego 2001, v.4438, 12-18 (2001)
- 195) E. Popov and M. Nevière: "Arbitrary shaped, periodic, anisotropic media: new presentation of Maxwell equations in the truncated Fourier space," Proc. SPIE 46<sup>th</sup> Annual Meeting, San Diego 2001, v.4438, 19-30 (2001)
- 196) E. Popov, M. Nevière, and B. Bozhkov: "Light demultiplexing by photonic crystal grating," Proc. SPIE 46<sup>th</sup> Annual Meeting, San Diego 2001, v.4438, 77-84 (2001)
- 197) S. Enoch, E. Popov, M. Nevière, and R. Reinisch: "Sub-wavelength hole array enhanced light transmission," Proc. SPIE 46<sup>th</sup> Annual Meeting, San Diego 2001, v.4438, 69-76 (2001)
- 198) E. Popov and J. Hoose: "Light demultiplexing by using diffraction gratings: importance of electromagnetic effects," Proc. SPIE 46<sup>th</sup> Annual Meeting, San Diego 2001, v.4439, 101-110 (2001)
- 199) B. Gralak, G. Tayeb, S. Enoch, and E. Popov: "Color rendering techniques applied to the study of butterflies wings," OSA Techn. Digest DOMO, v. 75, 172-174 (2002)
- 200) E. Popov, M. Nevière, and N. Bonod: "Differential theory amelioration using Fourier factorisation rules," OSA Techn. Digest DOMO, v. 75, 34-37 (2002), invited talk
- 201) E. Popov, J. Hoose, B. Frankel, C. Keast, M. Fritze, T.Y. Fan, D. Yost, and S. Rabe: "Low-polarization dependent high-efficiency WDM," Proc. SPIE 48<sup>th</sup> Annual Meeting, San Diego 2003
- 202) N. Bonod, E. Popov and M. Nevière: "Factorization of nonlinear Maxwell equations in periodic media," Proc. SPIE 48<sup>th</sup> Annual Meeting, San Diego 2003, v.5840, 409-420 (2005)
- 203) Philippe Boyer, Gilles Renversez, Evgueni Popov, Michel Neviere, "The Fast Fourier Factorization method applied to the study of arbitrary cross section microstructured

- optical fibers,” Proc. SPIE 5840, p. 409-420, Photonic Materials, Devices, and Applications; Goncal Badenes, Derek Abbott, Ali Serpenguzel; Eds., July 2005
- 204) Philippe Boyer, Gilles Renversez, Evgeni Popov et Michel Nevière, “The Fast Fourier factorization method applied to the study of arbitrary cross section microstructured optical fibers,” Conférence OWTN2005, Grenoble, 9-10 Avril 2005
- 205) Wenger, Jerome; Dintinger, Jose; Bonod, Nicolas; Popov, Evgueni; Lenne, Pierre-François; Ebbesen, Thomas W; Rigneault, Herve, “Enhanced Raman scattering in a 10 Attoliter nanohole,” Nanophotonics, Technical Digest NANO, paper NThB4 (2006)
- 206) Brian Stout, Michel Nevière, and Evgeny Popov, “The  $T$ -matrix of the Homogeneous Anisotropic Sphere: Applications to Orientation Averaged Resonant Scattering,” Progress In Electromagnetics Research Symposium 2007, Beijing, China, March 26-30, Proc. PIERS, 1450-1451 (2007)
- 207) Evgeni Popov, Nicolas Bonod, and Michel Nevière, “Directivity of Light Transmission through a Single Subwavelength Aperture without Plasmon Resonance,” Progress In Electromagnetics Research Symposium 2007, Beijing, China, March 26-30, Proc. PIERS, 1451-1455 (2007)
- 208) E. Popov, D. Maystre, R. C. McPhedran, M. Nevière, M. C. Hutley, and G. H. Derrick, “Total absorption of unpolarized light by crossed gratings,” Proc. COST Meeting Warsaw, p.1.2.1-7 (2008)
- 209) D. Gerard, A. Devillez, H. Aouani, N. Bonod, E. Popov, J. Wenger, and H. Rigneault, “Latex microspheres to enhance fluorescence correlation spectroscopy beyond the diffraction limit,” 12<sup>th</sup> Carl Zeiss sponsored workshop of FCS and related methods, France (2009)
- 210) E Popov, S Enoch, “Thin metamaterials as antireflection coating,” Transparent Optical Networks (ICTON), p.1-4, 2010
- 211) N. Bonod, H. Aouani, E. Devaux, O. Mahboub, E. Popov, H. Rigneault, T.W. Ebbesen, J. Wenger, “Enhanced and directional molecular fluorescence in nanoaperture antennas,” E-MRS Spring Meeting, Strasbourg, France (2012)
- 212) D Shu, AL Fehrembach, E Popov, “Tunable resonant narrow-band filter based on electro-optic materials,” Proc. SPIE, 8425, 842520-1 (2012)

### **Thèses :**

- 213) E. Popov: *Photoconductivity of AgI*, Master Degree thesis, Sofia University, 1982 (120 pages), en bulgare
- 214) E. Popov: *Resonance interactions in relief dielectric diffraction gratings*, Ph. D thesis, Sofia 1987 (12 publications, 142 pages), en bulgare
- 215) E. Popov: *Anomalies in relief diffraction gratings*, Sc. D. thesis, Sofia 1990 (36 publications, 298 pages), en bulgare